Anmeldung für email-Verteiler:

email mit Betreff "ADM III"

an rolf.moehring@tu-berlin.de

ADM III Angewandte Netzwerkoptimierung

I Verkehr und Flüsse

§1 Das Basismodell für statischen Verkehr

1.1 Grundlagen

Rushhour $\Rightarrow$ statisches Bild für einige Stunden

$\Rightarrow$ Standardflussmethoden anwendbar

x_a = Flussmenge / Zeiteinheit auf Kante (arc) a

Digraph $G=(V,A)$ modelliert Straßennetz $|A| = 30.000$ für Berlin

Start-Ziel-Knotenpaare (s_k, t_k) $k \in C$ (C = Menge der Commodities)

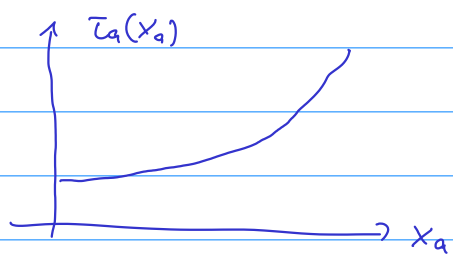
mit Demand d_k = Flussmenge

Fluss zwischen s_k, t_k kann sich beliebig aufspalten

(stetiger Fall, sinnvoll wenn d_k groß)

Interaktion zwischen verschiedenen (s_k, t_k) durch Congestion (Stau)

Fluss x_a auf Kante a verursacht eine flussabhängige Fahrzeit $\tau_a(x_a)$



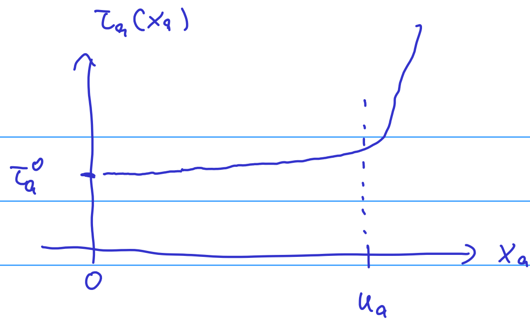
(latency, Latenz)

meist als stetig, (streng) monoton wachsend

z.B. $\tau_a(x_a) := \tau_a^0 \cdot \left(1 + \alpha \left(\frac{x_a}{u_a}\right)^\beta\right)$

τ_a^0: free flow travel time

u_a = practical capacity



gängige Parameter

$\beta = 4$

$\alpha = 0{,}15$

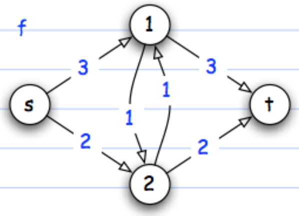
Flüsse (s_k, t_k) darstellbar als Kantenfluss

$$x^A = \begin{pmatrix} \text{Fluss auf Kante } 1 \\ \dots \quad 2 \\ \vdots \\ \dots \quad m \end{pmatrix}$$

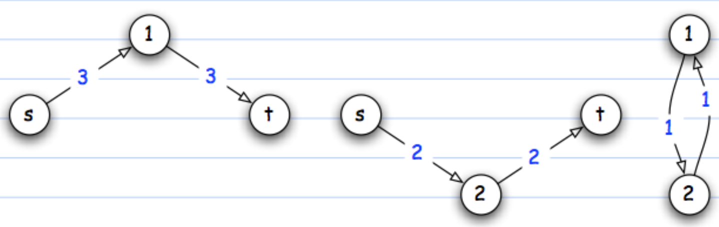
oder als Pfadfluss

$$x^P = \begin{pmatrix} \text{Fluss auf Weg } 1 \\ \dots \quad 2 \\ \dots \quad p \\ \text{Fluss auf Kreis } 1 \\ \vdots \\ \text{Kreis } q \end{pmatrix} \qquad p + q \leq m$$

s,t-Fluss



Zerlegung in gerichtete Wege und Kreise (nicht eindeutig)



zugehörige Linearkombination

$$\begin{bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{12} \\ f_{1t} \\ f_{21} \\ f_{2t} \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Flüsse berechnen als Pfadflüsse $\Rightarrow$ Lösungen enthalten keine Kreise

$\mathcal{P}_k$ Menge der (s_k, t_k) Pfade (o.B.d.A. paarweise disjunkt)

$\mathcal{P} = \dot{\bigcup}_k \mathcal{P}_k$

Ein Pfadfluss x ist zulässig

$$:\Longleftrightarrow \quad \sum_{P \in \mathcal{P}_k} x_P = d_k \quad \forall k \in C$$

$$x_P \geq 0$$

"Kosten" $C(x)$ eines Pfadflusses

$$:= \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a(x_a) \quad = \text{Gesamtfahrzeit (Netzbelastung)}$$

$$= \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \underbrace{\Big(\sum_{a \in P} \tau_a(x_a) \Big)}_{=: \tau_P(x)}$$

$$\left[\text{denn} \quad x_a = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ a \in P}} x_P \quad \Rightarrow \quad \sum_a x_a \tau_a(x_a) = \sum_a \Big(\sum_{P \ni a} x_P \Big) \tau_a(x_a) \right.$$

$$\left. = \sum_P x_P \underbrace{\sum_{a \in P} \tau_a(x_a)}_{\tau_P(x)} \right]$$

Bemerkung: können Kosten auch allgemeiner als "Kantenkosten" $c_a(x_a)$ betrachten

$$\Rightarrow \quad C(x) = \sum_a \underbrace{c_a(x_a)}_{\text{konvex}}$$

hier: $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$ (im weiteren als konvex vorausgesetzt)

1.2 Das Systemoptimum (SO)

Problem SO :

$$\begin{aligned} &\min \quad C(x) \\ &\text{unter} \quad \sum_{P \in \mathcal{P}_k} x_P = d_k \quad \forall\, k \in C \\ &\qquad\quad x_P \geq 0 \end{aligned}$$

Formulierung hat exponentiell viele Variable

aber: Kantenformulierung hat nur m Variable

aus Kantenfluss mit Kosten $C(x)$ kann durch Pfaddekomposition ein Pfadfluss mit gleichen Kosten konstruiert werden

$\Rightarrow$ bei konvexer Zielfunktion $C(x)$ kann SO mit Ellipsoidmethode in polyn. Zeit berechnet werden

bis auf additives ε

geht da Nebenbedingungen in polyn. Zeit separierbar sind

SO aus nichtlinearer Sicht:

konvexes separables nichtlin. Opt. Problem mit linearen Nebenbedingungen

$$C(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \cdot c_P(x)$$ separabel nach Variablen

$$= \sum_{a \in A} x_a \cdot \bar{c}_a(x_a)$$

konvex $\Rightarrow$ lokales Optimum = globales Optimum

Optimalitätsbed. der nicht lin. Optimierung

(first order conditions, Kuhn-Tucker Bedingungen)

1.1 Lemma (Optimimalitätsbed. für SO)

Seien die $c_a(x_a)$ konvex und diffbar

Dann ist ein Pfadfluss f^* optimal in SO

$$\Leftrightarrow \quad c_P'(f^*) \le c_Q'(f^*) \quad \forall\, k \in C \text{ und alle Pfade } P, Q \in \mathcal{P}_k$$
$$\text{mit } f_P^* > 0$$

$$\text{mit } c_P'(f^*) := \sum_{a \in P} \frac{d}{dx_a} c_a(x_a) = \sum_{a \in P} c_a'(x_a)$$

Speziell für $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$ ergibt sich

$$c_a'(x_a) = \tau_a(x_a) + x_a \cdot \tau'(x_a)$$

Bemerkung

(1) Beweisidee (später genauer)

Fluss f^* ist lokal optimal (reicht wegen Konvexität)

$\Leftrightarrow$ Verlagerung von Fluss auf einen anderen Pfad erhöht die Kosten

$\Leftrightarrow$ marginaler "Gewinn" für Verringerung von Fluss entlang Pfad $P \in \mathcal{P}_k$

$\le$ marginale Kosten für Vergrößerung von Fluss entlang Pfad $Q \in \mathcal{P}_k$

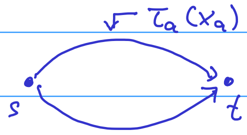
$\Leftrightarrow$ $c_P'(f^*) \le c_Q'(f^*)$

(2) Interpretation im Fall $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$

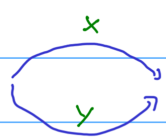
$$c_a'(x_a) = \underbrace{\tau_a(x_a)}_{\substack{\text{Fahrzeit} \\ \text{auf Kante} \\ a}} + \underbrace{x_a \cdot \tau_a'(x_a)}_{\substack{\text{"externe" Kosten,} \\ \text{die Nutzer, die jetzt } a \text{ benutzen,} \\ \text{für andere Nutzer verursachen}}}$$

Systemoptimum kann zu schlechten Individuallösungen führen (Pigou 1920)

$\tau_a(x_a) = x_a^\beta$



$d = 1$ $\quad \tau_a(x_a) = \text{konst} = (\beta+1)(1-\varepsilon) > 0$



$x + y = 1$

Optimalitätsbed.: $\frac{d}{dx}\left(x \cdot x^\beta\right) = \frac{d}{dy}\left(((\beta+1)(1-\varepsilon) \cdot y\right)$

$$(\beta+1)\cdot x^\beta = (\beta+1)(1-\varepsilon)$$

$\Rightarrow x^\beta = 1-\varepsilon \Rightarrow x = \sqrt[\beta]{1-\varepsilon} < 1$ für $\varepsilon > 0 \Rightarrow y > 0$

$\Rightarrow$ im SO folgendes Bild.

Fahrzeit oben $\tau_q(x_q) = \left(\sqrt[\beta]{1-\varepsilon}\right)^\beta = 1-\varepsilon < 1 \quad \forall \beta$

Fahrzeit unten $(1+\beta)(1-\varepsilon) \to \infty$ für $\beta \to \infty$

$\Rightarrow$ "einige" $(y>0)$ werden geopfert für das Gemeinwohl

1.3 Das Nutzergleichgewicht (User Equilibrium, UE)

Nutzer sind eigennützig, suchen für sich den schnellsten Weg

Ein zul. Fluss f ist im Wardrop Equilibrium (Wardrop 1952)

$:\Longleftrightarrow \tau_P(f) \leq \tau_Q(f) \quad \forall k \in C, \ \forall P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$

Nash führte 1951 allgemeine Gleichgewichte für nicht-kooperative Spiele ein. In unser Situation bedeutet dies:

Ein zul. Fluss ist im Nash-Gleichgewicht (User Equilibrium, UE)

$:\Longleftrightarrow$ kein Nutzer kann sich durch Wahl eines anderen Pfades verbessern (wenn alle anderen sich nicht verändern)

$\Longleftrightarrow \forall k \in C \ \forall Q, R \in \mathcal{P}_k$ mit $f_Q > 0$

und für alle $0 < \varepsilon \leq f_Q$ gilt:

Der Fluss f^ε definiert durch

$$f_P^\varepsilon := \begin{cases} f_Q - \varepsilon & \text{für } P = Q \\ f_R + \varepsilon & \text{für } P = R \\ f_P & \text{sonst} \end{cases}$$

ε Fluss geht von Q zu R

erfüllt $\tau_Q(f) \leq \tau_R(f^\varepsilon)$

1.2 Lemma (UE = WE)

Sind alle $\tau_a(x_a)$ stetig und schwach monoton steigend, so gilt für jeden zulässigen Fluss f

f ist UE $\iff$ f ist Wardrop Equilibrium

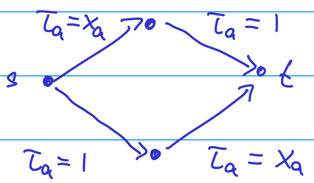
Beweisidee: Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

Aufgabe 1 Zeige: Keine der beiden Voraussetzungen kann fallengelassen werden

Nachteile des UE

1) nicht optimal im Sinne des SO
2) keine Monotonie (d.h. mehr Straßen $\not\Rightarrow$ geringere Gesamtfahrzeit)

1.3 Beispiel (Braess Paradox)



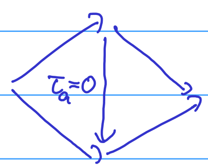
$d = 1$

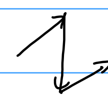
UE: schicke $1/2$ entlang beider Pfade

$\Rightarrow \tau_p(x) = \frac{3}{2}$ auf jedem Pfad

$C(x) = \sum_p x_p \cdot \tau_p(x) = 3/2$

Baue neue schnelle Straße



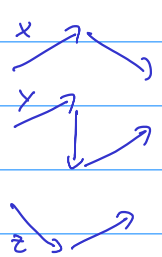
UE: schicke 1 entlang 

$\Rightarrow \tau_p(x) = 2$ auf diesem Pfad

$\Rightarrow C(x) = 2$

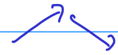
$C(SO) \leq 3/2$

genauer Wert des SO (unter Annahme, dass $\tau_a(x_a) = \varepsilon > 0$ auf neuer Straße)



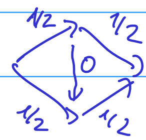
$x + y + z = 1$

Gleichheit der marginalen Kosten

 $\frac{d}{d(x+y)}(x+y)^2 + \frac{d}{dx}(1 \cdot x)$

$\nearrow\downarrow\searrow \;=\; \frac{d}{d(x+y)}(x+y)^2 + \frac{d}{dy}\,\varepsilon\cdot y + \frac{d}{d(y+z)}(y+z)^2$

$\searrow\nearrow \qquad \frac{d}{dz}(z\cdot 1) + \frac{d}{d(y+z)}(y+z)^2$

$\Rightarrow$ SO : 

kein Fluss auf neuer Straße

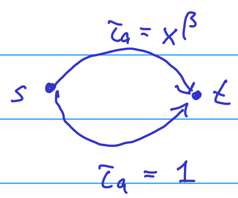
$C(SO) = 3/2$

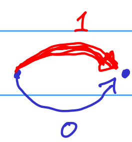
Maß wie sich SO und UE unterscheiden

Preis der Anarchy $:= \dfrac{C(UE)}{C(SO)} \geq 1$ PoA

1.4 Beispiel (Pigou)

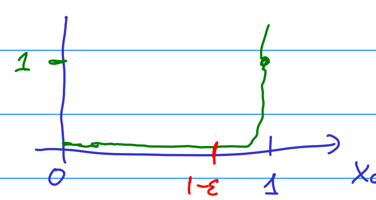
Der PoA kann (bei beliebigen $\tau_a(x_a)$) beliebig groß werden

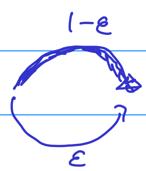


$d = 1$ UE : 

$C(UE) = 1$

β groß $\Rightarrow$ x^β hat folgende Gestalt



Fluss 

hat Kosten $\underbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)}_{\leq 1}\cdot\underbrace{(1-\varepsilon)^\beta}_{\sim 0}}_{\sim 0} + \underbrace{\underbrace{\varepsilon\cdot 1}_{\sim 0}}_{\sim 0} \approx 0$

PoA $\sim \dfrac{UE}{SO} = \dfrac{1}{\approx 0}$ unbeschränkt

(allerdings bei sehr steilen Fahrzeitfunktionen)

Frage: Wie groß ist der PoA bei vernünftigen Fahrzeitfunktionen?

1.4 Beziehungen zwischen UE und SO

folgen aus Lemma 1.1 und der Def. des Wardrop Equilibriums

Lemma 1.1: f^* ist SO $\iff c_P'(f^*) \le c_Q'(f^*)$ $\forall k$ $\forall P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P^* > 0$

Def UE $\quad f$ ist UE $\iff \tau_P(f) \le \tau_Q(f)$ – " –

Relationship between UE and SO

1.5 Proposition

f is a UE flow $\Leftrightarrow$ $\tau_P(f) \le \tau_Q(f)$ for all k and all paths $P, Q \in \mathcal{P}_k$ with $f_P > 0$

f is a SO flow $\Leftrightarrow$ $c_P'(f) \le c_Q'(f)$ for all k and all paths $P, Q \in \mathcal{P}_k$ with $f_P > 0$

f is SO w.r.t. $\tau_a(x_a)$ $\Leftrightarrow$ f is UE w.r.t. $\tau_a(x_a) + x_a \tau_a'(x_a)$

f is UE w.r.t. $\tau_a(x_a)$ $\Leftrightarrow$ f is SO w.r.t. $\dfrac{1}{x_a}\displaystyle\int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt$

[Beckmann, McGuire & Winston 1956]

Interpretation:

(1) SO ist UE bzgl. der marginalen Kosten $\frac{d}{dx_a}(x_a \cdot \tau_a(x_a))$ als Fahrzeitfunktion

(2) UE ist SO bzgl. der Fahrzeitfkt. $\hat{\tau}_a(x_a) := \frac{1}{x_a}\int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt$

denn: $\frac{d}{dx_a}\left(\cancel{x_a} \cdot \frac{1}{\cancel{x_a}} \int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt\right) = \tau_a(x_a)$

UE ist SO bzgl. der Kostenfkt $\sum_{a \in A} \int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt$

"Beckmann Transformation"

1.6 Folgerung

(1) unter den Voraussetzungen von Prop. 1.5 ist das UE f eindeutig als Kantenfluss bestimmt

(2) für alle Pfade $P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$, $f_Q > 0$ gilt im UE f

$$\tau_P(f) = \tau_Q(f) =: L_k(f)$$

[alle Fluss führenden (s_k, t_k)- Wege haben dieselbe Fahrzeit

(3) UE und SO können mit denselben Methoden berechnet werden

Beweis:

(1): UE ist SO bzgl. $\sum_a \underbrace{\int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt}_{\text{streng monoton, diffbar, konvex}}$

$\Rightarrow$ eindeutiges Optimum

(2) folgt aus Def Wardrop Equilibrium

(3) klar wegen Prop. 1.5

1.7 Folgerung (Mautgebühren)

Prop. 1.5 ist Basis für Verkehrslenkung durch Maut

Wenn man ein SO bzgl. τ_a erzielen will, muss man durch Maut die Kosten pro Kante zu $\underbrace{\underbrace{\tau_a(x_a)}_{\text{Zeit}} + \underbrace{x_a \tau_a'(x_a)}_{\text{Maut}}}_{\text{gleichgewichtet}}$ verändern

Technisches Lemma (nützlich für Analyse des PoA)

Sei f ein zulässiger, fester Fluss

Die Kosten eines zulässigen Flusses x relativ zu Fahrzeiten bzgl. f

als $\quad c^f(x) = \sum_{a \in A} \tau_a(f_a) \cdot x_a$

1.8 Proposition (Smith 79, Dafermos 80)

f sei zulässig für eine Instanz mit stetigen, schwach monotonen τ_a

Dann gilt

$$f \text{ is UE} \iff C^f(f) \leq C^f(x) \quad \forall \text{ zulässigen Flüsse } x$$

Interpretation: UE f minimiert die relativen Kosten $C^f(x)$

Beweis:

"$\Rightarrow$" $\quad f$ UE $\Rightarrow$
$$\left.\begin{aligned} \tau_P(f) &= L_k(f) \quad \forall P \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f_P > 0 \\ \tau_Q(f) &\geq L_k(f) \quad \forall Q \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f_Q = 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

Für einen bel. zulässigen Fluss gilt dann $d_k = \sum_{Q \in \mathcal{P}_k} x_Q = \sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P$

$$C^f(f) = \sum_k \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_k \\ f_P > 0}} L_k(f) \cdot f_P = \sum_k L_k(f) \underbrace{\sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_k \\ f_P > 0}} f_P}_{d_k} = \sum_k L_k(f) \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_k \\ x_Q > 0}} x_Q$$

$$= \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}_k} L_k(f)\, x_Q \overset{(*)}{\leq} \sum_k \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_k \\ x_Q > 0}} \tau_Q(f)\, x_Q = C^f(x)$$

"$\Leftarrow$" $\quad C^f(f) \leq C^f(x) \quad \forall$ zul. Flüsse x

Ann. f ist kein UE

$\Rightarrow \exists\, k,\ Q, R \in \mathcal{P}_k$ mit $f_Q > 0$ und $\tau_Q(f) > \tau_R(f)$

(Negation der Wardrop Bedingung)

Sei x der Fluss, der aus f entsteht, indem aller Fluss von Q auf den Weg R geschickt wird

$$\Rightarrow \quad C^f(f) - C^f(x) = \tau_Q(f) \cdot f_Q - \tau_R(f) \cdot f_Q$$
$$= (\tau_Q(f) - \tau_R(f)) \cdot f_Q > 0$$

$\Rightarrow x$ hat kleinere relative Kosten bzgl. f, Widerspruch $\square$

1.9 SATZ (Roughgarden & Tardos 2002)

Für affin-lineare Fahrzeitfkt $\tau_a(x_a) = \alpha_a \cdot x_a + \beta_a$ gilt $\frac{UE}{SO} \le \frac{4}{3}$

Ist $\beta_a = 0 \;\; \forall a$ so ist $UE/SO = 1$

Beweis (Schulz & Stier 2004)

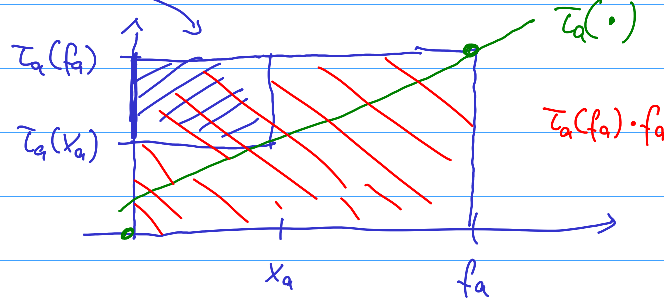
(1) Sei f ein UE Fluss und x ein bel. zulässige Fluss

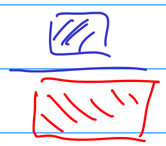
Prop 1.8 $\Rightarrow \quad C(f) = C^f(f) \le C^f(x) = \sum_{a \in A} \tau_a(f_a)\, x_a$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{a \in A \\ x_a < f_a}} \tau_a(f_a) \cdot x_a}_{} + \underbrace{\sum_{\substack{a \in A \\ x_a \ge f_a}} \tau_a(f_a) \cdot x_a}_{\le \tau_a(x_a) \cdot x_a}$$

wegen Monotonie

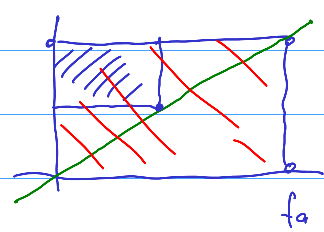
$$= \tau_a(x_a) \cdot x_a + \underbrace{\left(\tau_a(f_a) - \tau_a(x_a)\right) \cdot x_a}_{}$$



 $=: \beta$

wird am größten (für affin lin Fkt)

wenn



$\beta \le \frac{1}{4}$

Also $C(f) \le \underbrace{\sum_{a \in A} \tau_a(x_a) \cdot x_a}_{C(x)} + \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{a \in A} \tau_a(f_a) \cdot f_a}_{C(f)}$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} C(f) \le C(x) \quad \Rightarrow \quad C(f) \le \frac{4}{3} C(x)$

für jeden zulässigen Fluss, speziell für SO

$$\Rightarrow \frac{UE}{SO} = \frac{C(f)}{C(x)} \le \frac{4}{3}$$

Braess Paradox: $UE = 2 \quad SO = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow UE/SO = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$

↑

affin lin. Fahrzeitfkt.

$\Rightarrow$ Schranke $4/3$ ist scharf

Beweis zeigt außerdem: $C^f(x) \le C(x) + \frac{\square}{\square} C(f)$ (1.1)

(2) Sei $\tau_a(x_a) = \alpha_a \cdot x_a$ d.h. $\beta_a = 0 \;\; \forall a$

Opt. Krit. für SO f^*

$$\underbrace{\tau_P'(f^*)}_{} \le \tau_Q'(f^*) \quad \forall k \;\; \forall P, Q \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f^*_P > 0$$

$$\sum_{a \in P} 2 \cdot \alpha_a x_a \le \sum_{a \in Q} 2 \alpha_a x_a$$

Wardrop Bed. für UE f

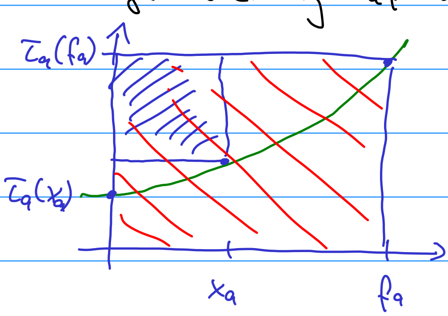
$$\tau_P(f) \le \tau_Q(f) \qquad \text{—"—}$$

$$\sum_{a \in P} \alpha_a \cdot x_a \le \sum_{a \in Q} \alpha_a x_a$$

offenbar äquivalente Bedingungen

$\square$

Verallgemeinerung auf allgemeine Fahrzeitfunktionen



Suche $\beta = \frac{\square}{\square}$ möglichst groß

$$\Rightarrow UE \le SO + \beta \cdot UE$$

$$\Rightarrow \frac{UE}{SO} \le 1/(1-\beta)$$

Aufgabe 1.2

Berechne den Preis der Anarchie für $x^2, x^3, x^4 \dots x^p$

1.10 Satz (Roughgarden & Tardos 2002)

$C(UE) \leq C($SO für den doppelten Demand$)$

positive Interpretation

Netzbelastung im UE ist beschränkt (durch die optimale Netzbelastung für den doppelten Bedarf

negative Interpretation

zu den Kosten des UE kann man optimal bestenfalls den doppelten Demand routen

Verwandtes Resultat

1.11 SATZ (Correa, Schulz, Stier 2005)

$C(UE) \leq C($SO für den $(1+\beta)$-fachen Demand$)$

mit $\beta = \frac{\quad^{max}}{\quad}$

$\beta \leq 1 \Rightarrow$ Satz 1.11 impliziert Satz 1.10

ist im Einzelfall deutlich schärfer

z.B. affin lineare $\tau_a(x_a) \Rightarrow \beta = 1/4$

$\Rightarrow C(UE) \leq C($SO für den $5/4$-fachen Demand$)$

Beweis:

Sei f ein UE-Fluss, x ein optimaler Fluss für den $(1+\beta)$-fachen Demand

Betrachte Fluss y mit $y_a := \frac{1}{1+\beta} x_a$

$\Rightarrow y$ ist Fluss zu Demands d_k, genau wie f

$\Rightarrow$ (Prop 1.8) $\quad C(f) = C^f(f) \leq C^f(y)$

$$= \sum_{a \in A} \tau_a(f_a) \cdot y_a = \frac{1}{1+\beta} C^f(x)$$

$$\Rightarrow (1+\beta)\, C(f) \leq C^f(x)$$

$$\leq C(x) + \beta\, C(f)$$

siehe Beweis von Satz 1.9 (1.1)

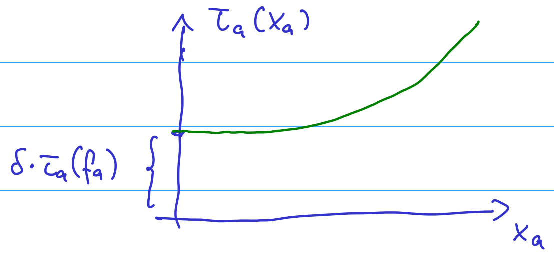
$$\Rightarrow C(f) \leq C(x) \quad \square$$

1.3 **Aufgabe 1.3**

Verschärfung der Abschätzung $\frac{UE}{SO} \leq \frac{1}{1-\beta}$

für den Fall $\tau_a(0) \geq \delta\, \tau_a(f_a)$

UE Fluss auf a



Berücksichtige δ im Preis der Anarchie

(i) allgemein

(ii) bei BPR-Funktionen (realistische δ)