§ 12 Kurze Kreisbasen in der Menge aller Kreisbasen ist polynomial (im Gegensatz zu manche Teilklasse)

zunächst einige Vorbereitungen:

Zielfunktion $\sum_{C \in B} \sum_{a \in C} (u_a - l_a)$ hängt nicht von Orientierung der Kanten ab $\Rightarrow$ kann zugrunde liegenden ungerichteten Graphen verwenden.

Bzgl. ungerichteter Graphen betrachtet man in der Regel den Kreisraum über GF(2). Folgendes Lemma zeigt, dass dies auch bzgl. kurzer Basen möglich ist

Vorteil: GF(2) ermöglicht einfaches Rechnen

$1+1=0, \quad -1=1$ !

**12.1 LEMMA:** Sei $G$ ein Digraph und $G'$ der zugrundeliegende ungerichtete Graph. Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von $\nu$ Kreisen aus dem Zykelraum von $G$ in $\mathbb{R}^E$ und sei $\mathcal{B}'$ die Menge der zugehörigen ungerichteten Kreise in $G'$. Dann gilt:

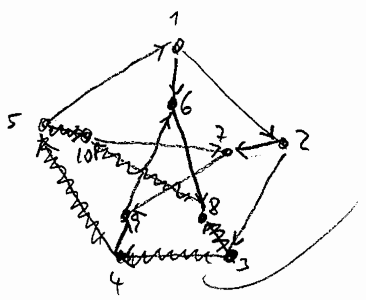
$$\det \mathcal{B} \text{ ist ungerade} \iff \mathcal{B}' \text{ ist Zykelbasis von } G' \text{ bzgl. } GF(2)$$

Beweis: Betrachte Laplace Entwicklung von $\det \mathcal{B}$ und $\det \mathcal{B}'$. Dann gilt wegen Rechnung in $GF(2)$

$$\det \mathcal{B} = 2k,\ k \in \mathbb{N} \iff \det \mathcal{B}' = 0 \qquad \square$$

Beispiel: Es gibt Basen in $G$ über $\mathbb{R}$, die keine Basis von $G'$ über $GF(2)$ induzieren

Petersen Graph:




jeder dieser Kreise + innerer Stern bilden Basis

| (1,2) | (2,3) | (3,4) | (4,5) | (5,1) | (6,8) | (8,10) | (10,7) | (7,9) | (9,6) | (1,6) | (2,7) | (3,8) | (4,9) | (5,10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | -1 | | | | | -1 | | 1 | | |
| | 1 | 1 | | | | | | -1 | | | -1 | | 1 | |
| | | 1 | 1 | | | -1 | | | | | | -1 | | 1 |
| | | | 1 | 1 | | | | | -1 | 1 | | | -1 | |
| 1 | | | | 1 | | | -1 | | | | 1 | | | -1 |
| | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |

Summe der Kreise $\neq 0$ über $\mathbb{R}$, aber $= 0$ über $GF(2)$

**12.2 FOLGERUNG:** Jede ganzzahlige Basis in $G$ ist eine Basis in $G'$

d.h. es reicht, im ungerichteten Graphen eine kurze Basis zu finden und dann zu prüfen, ob sie in gerichteten gzz. ist.

vorteilhaft, da Linearkombinationen über $GF(2)$ besonders einfach sind, nur Koeffizienten $0, 1$ und $1+1=0$, $-1=1$

**12.3 ALGORITHMUS** (de Pina 95, Berger et al 04, Kavitha et al 05)

Input: Ein ungerichteter zh. Graph $G$ mit positiven Kantengewichten $w_e$

Output: eine minimale Kreisbasis $\mathcal{B}$ über $GF(2)$

Methode: (Berechne Kreise aus $\mathcal{B}$ iterativ, indem man einen kürzesten Kreis wählt, der Komponenten im orthogonalen Komplement der bisherigen Kreise hat, mit gewissen Einschränkungen hier)

[später]

1. $\mathcal{B} := \emptyset$
2. **for** $i := 1$ **to** $\nu$ **do**
3. **if** $i = 1$ **then** sei $S_1 \in \{0,1\}^m$ beliebig, $S_1 \neq 0$ (*)

   **else**
4. sei $S_i \neq 0$ in $\{0,1\}^m$ orthogonal zu den bereits berechneten Kreisen $C_1, \dots, C_{i-1}$ aus $\mathcal{B}$ (*)

   d.h., $S_i$ ist nichttriviale Lösung $x$ des linearen Gleichungssystem

$$g(C_k)^T \cdot x = 0 \qquad k = 1, \dots, i-1$$

5. berechne den kürzesten Kreis $C_i$ (d.h. $w(C_i)$ minimal) mit $g(C_i)^T \cdot S_i = 1$
6. $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{C_i\}$

**12.4 SATZ** (de Pina 95; Berger et al 04; Kavitha et al 04)
Algorithmus 12.3 berechnet eine kürzeste Kreisbasis über $GF(2)$

Beweis: Annahme nicht. Betrachte dann das größte $i$ so dass $C_1, \ldots, C_{i-1}$ zu einer minimalen Kreisbasis $\mathcal{B}^*$ erweiterbar ist, aber nicht $C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i$ $\quad (i-1=0$ möglich$)$

$\mathcal{B}^*$ Basis $\Rightarrow$ $C_i$ ist durch Kreise aus $\mathcal{B}^*$ linear kombinierbar,

etwa $\underbrace{C_i = D_1 + \ldots + D_k}$ $\quad (1)$

Inzidenzvektoren und Kreise identifiziert

$C_i^T \cdot S_i = 1$ ergibt $\sum_{\ell=1}^{k} D_\ell^T \cdot S_i = 1$

$\Rightarrow$ $(GF(2))$ mindestens ein $D_j^T \cdot S_i = 1$

$\Rightarrow$ $(C_i$ kürzester Kreis mit $C_i^T S_i = 1)$ $\quad w(C_i) \leq w(D_j)$

Betrachte $\mathcal{B}' := \mathcal{B}^* - \{D_j\} \cup \{C_i\}$

(1) $\Rightarrow$ $D_j = C_i + D_1 + \ldots + D_{j-1} + D_{j+1} + \ldots + D_k$

$\Rightarrow$ $D_j$ durch $\mathcal{B}'$ ausdrückbar

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ ist ebenfalls Basis

Claim: $\mathcal{B}' \supseteq \{C_1, \ldots, C_{i-1}\}$

Beweis Claim: $\{C_1, \ldots, C_{i-1}\} \subseteq \mathcal{B}^*$ nach Annahme

$\left.\begin{array}{l}\text{Aus } \mathcal{B}^* \text{ weggelassener Kreis } D_j \notin \{C_1, \ldots, C_{i-1}\} \\ \text{da } D_j^T S_i = 1, \text{ aber } C_\ell^T S_i = 0 \text{ für } \ell = 1, \ldots, i-1\end{array}\right\} \Rightarrow$ Claim

$$w(C_i) \le w(D_j) \overset{B^* \text{ minimal}}{\Rightarrow} B' \text{ ist minimale Basis}$$

Claim $\Rightarrow$ $B'$ erweitert $C_1, \dots, C_i$ zu minimale Basis

$\Rightarrow$ Widerspruch $\square$

<u>Aufwand des Algorithmus:</u>

Kritisch sind Schritte 4: Gleichungssystem lösen

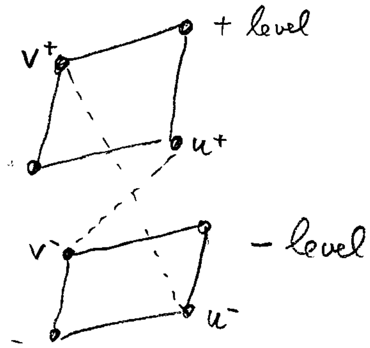
5: kürzesten Kreis mit Nebenbed. berechnen (*)

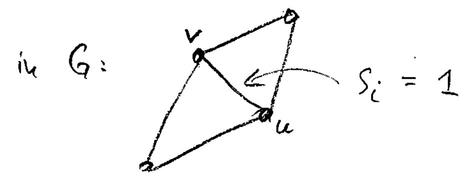
zu 5: über Kürzeste-Wege Berechnung in Hilfsgraphen $G_i$ in Iteration $i$

$G_i = (V_i, E_i)$ und $V_i := \{v^+, v^- \mid v \in V\}$

$E_i := \{ (u^+, v^+), (u^-, v^-) \mid e = (u,v) \in E, \ (S_i)_{(u,v)} = 0 \} \cup$

$\{ (u^+, v^-), (u^-, v^+) \mid (S_i)_{(u,v)} = 1 \}$




Kanten bekommen das Gewicht der sie erzeugenden Kante $(u,v)$

Jeder (elementare) $v^+, v^-$ - Weg in $G_i$ entspricht in $G$ einem Kreis $C$ (nach Kürzung 2x durchlaufener Kanten), der eine ungerade Anzahl von $S_i$-Kanten benutzt. Ein kürzester solcher Weg entspricht einem kürzesten Kreis $C$ mit $\chi(C)^T \cdot S \neq 0$

$\Rightarrow$ Schritt 5 kann durch kürzeste Wege Suche mit Dijkstra von jedem Knoten $v^+$ aus in $G_i$ behandelt werden

$\Rightarrow O(n \cdot SP(n,m))$ für Iteration $i$

$\Rightarrow O(m \cdot n\, SP(n,m))$ insgesamt

Ein Problem bleibt: Hilfsgraph $G_i$ muss zusammenhängend sein!

$\uparrow$

Hängt von Wahl des Zeugen $S_i$ ab!

$\uparrow$

hängt von Lösung des Gleichungsystems $g(C_k^T)x = 0$ $k = 1, \ldots, i-1$ ab

Wissen: Können uns auf Kanten eines Co-Baums bzgl. $G$ beschränken (max lin unabh. Teilmatrix)

Ergänze nichttriviale Lösung dieses beschränkten Gleichungssystem durch Baumkanten (zu dem Cobaum) mit Wert 0.

$\Rightarrow$ Zeuge $S_i$ erfüllt $S_i \cap T = \emptyset$

$\Rightarrow$ $T$ liegt in beiden "Teilen" des Hilfsgraphen $G_i$

$\Rightarrow$ diese Teile sind zusammenhängend

$\Rightarrow$ (über die Zusatzkanten ⁄⁄ ) $G_i$ ist zusammenhängend

zu 4: Gleichungssystem hat maximal $\nu$ Gleichungen und
$m$ Variablen $\Rightarrow$ $O(m^3)$ per Gauss-Elimination
$\Rightarrow$ $O(m^4)$ insgesamt

Verbesserung möglich

**12.5 SATZ** (Kavitha et al 04): Algorithmus 8.8 kann in
$O(m \cdot n \cdot SP(n,m))$ implementiert werden

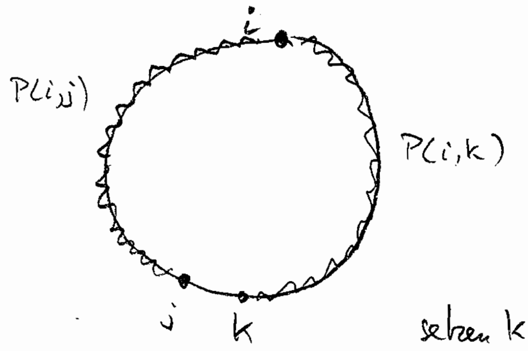
ohne Beweis

Bemerkung: Algorithmus 12.3 folgt dem <u>Greedy-Prinzip</u>
wähle in jeder Iteration einen kürzesten Kreis, der
Kanten im orthogonalen Komplement der bisherigen Kreise enthält, für die
Orthogonalität ist der Vektor $S_i$ der "<u>Zeuge</u>"

Anderer Ansatz (eher graphentheoretisch motiviert) beruht auf
folgendem Lemma

12.6 LEMMA: a) Knoten $i$ ist auf einem Kreis $C$ aus einer minimalen Kreisbasis $\Rightarrow$

$C$ enthält eine Kante $(j,k)$, so dass die Wege $P(i,j)$ und $P(i,k)$ entlang von $C$ kürzeste Wege in $G$ von $i$ nach $j$ bzw. $i$ nach $k$ sind




b) Sind alle $w(e) > 0$, so enthält die Menge aller Kreise, die man aus (beliebigen) kürzesten Wegen $P(i,j)$, $P(i,k)$ und Kante $(j,k)$ zusammensetzen kann, eine minimale Kreisbasis

ohne Beweis □

12.7 ALGORITHMUS (Horton 87)

1. Berechne kürzesten Weg $P(j,k)$ zwischen je 2 Knoten $j,k$
2. Für jeden Knoten $i$ und jede Kante $(j,k)$, konstruiere den Kreis $C(i,j,k) = P(i,j) + P(i,k) + (j,k)$ und berechne seine Länge (lasse dabei nicht-elementare Kreise weg)
3. Sortiere diese Kreise aufsteigend nach ihrer Länge, etwa $C_1, C_2, \ldots$
4. Konstruiere eine Basis mit dem <u>Greedyalgorithmus</u>

   4.1. $B := \{C_1\}$

   4.2. solange $|B| < \nu$

   wähle in der Reihenfolge $C_2, C_3 \ldots$

   den kürzesten Kreis $C$, der linear unabhängig zu allen Kreisen aus $B$ ist, setze $B := B \cup \{C\}$

**12.8 SATZ (Horton 87)** Der Algorithmus konstruiert eine minimale Kreisbasis

Beweis: (1) Es konstruiert eine Basis

lin. unabh. klar

zu jede Kante $e$ $\exists$ Kreis unter den $C_j$ mit $e \in C_j$

$\Rightarrow$ Basis

(2) minimale Basis

ergibt sich aus Greedy-Algorithmus und der linearen Unabhängigkeit

allgemein:

$(E, \mathcal{J})$ mit $\mathcal{J} \subseteq 2^E$ heißt Matroid

$:\Leftrightarrow$ $\emptyset \in \mathcal{J}$

$A \subseteq B \in \mathcal{J} \Rightarrow A \in \mathcal{J}$

$A, B \in \mathcal{J}$, $|A| < |B| \Rightarrow \exists\, e \in B$ mit $A \cup \{e\} \in \mathcal{J}$

Beispiele: a) {kreisfreie Kantenmengen eines unger. Graphen} = $\mathcal{J}$

b) {Mengen von linear unabh. Vektoren aus einer endlichen Menge von Vektoren} = $\mathcal{J}$

Greedy Algorithmus für Matroide

1. sortiere Menge $E$ aufsteigend: $w(e_1) < w(e_2) < \ldots < w(e_m)$
2. $B := \{e_1\}$
3. solange $|B| < \nu$ (= Kardinalität einer $\subseteq$-max. unabh. Menge, Basis von $(E, \mathcal{J})$, alle haben gleiche Kardinalität)

wähle in Reihenfolge $e_2, e_3, \ldots$ das erste Element mit $B \cup \{e\} \in \mathcal{J}$, setze $B := B \cup \{e\}$

$\boxed{\text{Beim Abbruch ist } B \text{ eine Basis von } (E, \mathcal{J}) \text{ mit minimalem Gewicht}}$

Beweis: Sei $A = \{e_1, \dots, e_\nu\}$ die vom Algorithmus erzeugte unabhängige Menge

Sei $B := \{f_1, f_2, \dots, f_\nu\}$ eine Basis mit minimalem Gewicht, beide

aufsteigend sortiert bzgl. Gewicht $w$.

Sei $r$ der erste Index mit $w(e_r) > w(f_r)$ (kein solches $r$ $\Rightarrow$ fertig)

Dann gilt: $\{e_1, \dots, e_{r-1}\} \in \mathcal{J}$ , $\{f_1, \dots, f_r\} \in \mathcal{J}$

$$|\{e_1, \dots, e_{r-1}\}| < |\{f_1, \dots, f_r\}|$$

$\Rightarrow \exists f \in \{f_1, \dots, f_r\}$ mit $\{e_1, \dots, e_{r-1}, f\} \in \mathcal{J}$

$\Rightarrow$ (Sortierung) $w(f) \leq w(f_r) < w(e_r)$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Wahl von $e_r$ im Greedyalgorithmus $\square$

Aufwand:

$n^2$ Wegberechnungen à $O(m \log n)$

maximal $n \cdot m$ Kreise

Sortierung der Kreise $O(n \cdot m \cdot \log(n \cdot m)) = O(n \cdot m \log n)$

maximal $\nu \leq m$ Tests auf Unabhängigkeit

1 Test = Gauss-Elimination in $m \times \nu$ Matrix $\leq m^3$

$\Rightarrow O(m^4)$

verbesserbar auf $O(m^\omega \cdot n)$

schnelle Matrizenmultiplikation, $\omega = 2{,}376$