

§ 10 Charakterisierung periodischer Potentiale

Bspw.: $\min \sum w_a x_a$

unter $x_a = \pi_j - \pi_i \quad \forall a = (i, j)$

$l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a \quad \forall a$

$0 \leq x_a \leq T-1$

p_a ganzzahlig x_a, π_i reell

Formulierung in
Knotenvariablen π_i
und Periodenoffsets p_a
mit Kantenvariablen
 x_a als Hilfsgrößen

= Formulierung im Potenzialraum

diese ist selbst für Lösbarkeit und MIP-Solver

10.1 Formulierung im Spannungsraum

↑
genauer: Raum der periodischen Spannungen

Frage: wie kann man periodische Spannungen unabhängig von
periodischen Potentialdifferenzen charakterisieren?

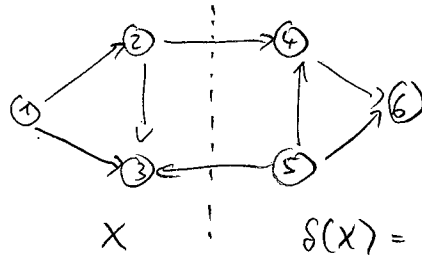
zunächst: aperiodische Spannung = Potentialdifferenzen

10.1 LEMMA: Die Menge der aperiodischen Spannungen eines
Digraphen G ist gleich dem Kozykelraum von G

Zur Erinnerung an ADMI

Zykelraum = der von den Inzidenzvektoren elementarer Kreise
aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{E(G)}$

Kozykelraum = der von den Inzidenzvektoren von Schnitten $S(X)$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{E(G)}$

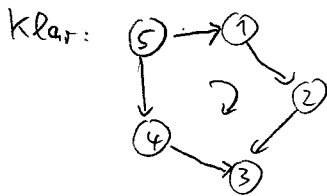


$S(X) = \{(2,4), (5,3)\} \rightarrow \mathcal{B}(S(X)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} (2,4) \\ (5,3) \end{matrix}$

Zykelraum und Kozykelraum sind orthogonal zueinander und $\dim(\text{Zykelraum}) + \dim(\text{Kozykelraum}) = \dim(\mathbb{R}^E)$

Beweis Lemma (b):

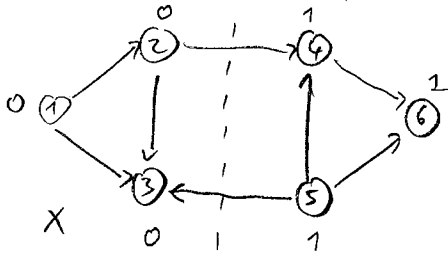
(1): C ungerichteter Kreis und $VK C^+$, $RK C^- \left. \vphantom{C} \right\} \Rightarrow \sum_{(i,j) \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{(i,j) \in C^-} (\pi_j - \pi_i) = 0$
 π Potenzial



$\Rightarrow (\pi_2 - \pi_5) + (\pi_3 - \pi_2) - (\pi_3 - \pi_4) - (\pi_4 - \pi_5) + (\pi_4 - \pi_5) = 0$

(1) \Rightarrow Vektoren von Potenzialdifferenzen sind orthogonal zum Zykelraum

(2): Inzidenzvektoren von Schnitten sind Potenzialdifferenzen



$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} (2,4) \\ (5,3) \end{matrix}$

(3): Potenzialdifferenzen bilden einen Vektorraum

Sei x Potenzialdifferenz zu π und y Potenzialdifferenz zu ϕ

$\Rightarrow (x+y)_{ij} = x_{ij} + y_{ij} = (\pi_j - \pi_i) + (\phi_j - \phi_i) = (\pi + \phi)_j - (\pi + \phi)_i$

$\Rightarrow x+y$ ist Potenzialdifferenz zu $\pi+b$

entsprechend: λx ist Potenzialdifferenz zu $\lambda\pi$

$$da \ (\lambda x)_{ij} = \lambda x_{ij} = \lambda(\pi_j - \pi_i) = (\lambda\pi)_j - (\lambda\pi)_i$$

(1), (2), (3) \Rightarrow Menge der Potenzialdifferenzen = Zykelraum von G

T spannendes Baum von $G \Rightarrow$ Fundamentalkreise bilden Basis des Zykelraums
 Fundamentalschnitte $\quad \quad \quad$ $\quad \quad \quad$ Zykelraum

$$da \ dim(\text{Zykelraum}) + dim(\text{Kozykelraum}) = dim(\mathbb{R}^E) \quad \square$$

gibt periodische Spannungen (= Potenzialdifferenzen periodische Spannungen)
 erweitern sich als "nahezu" orthogonal zum Zykelraum

10.2 SATZ (Serafini & Ukovich 89): Sei G ein Digraph. Für $x \in \mathbb{R}^{E(G)}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) x ist eine periodische Spannung zu T

(2) $x^T \cdot \mathcal{G}(C)$ ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T
 für jeden Kreis C von G

(3) $x^T \cdot \mathcal{G}(C)$ ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T
 für jeden Kreis C aus einer "Baum-Basis" des Zykelraums

Fundamentalkreise eines spannenden
 Baumes von G

Beweis:

(1) \Leftrightarrow (2): Sei π das periodische Potenzial zu x

$$\Rightarrow x^T \cdot \mathcal{G}(C) = \sum_{a=(i,j) \in C^+} (\pi_j - \pi_i + p_a \cdot T) - \sum_{a=(i,j) \in C^-} (\pi_j - \pi_i + p_a \cdot T) = \bar{x}^T \cdot \mathcal{G}(C) + \varepsilon T$$

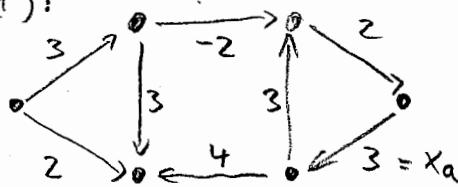
und $\bar{x} =$ Potentialdifferenz zu π und $z = \sum_{a \in E^+} p_a - \sum_{a \in E^-} p_a$

$$\Rightarrow x^T \cdot g(C) = \underbrace{x^T \cdot g(C)}_0 + z \cdot T$$

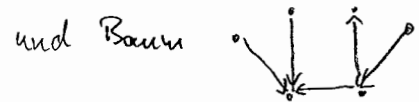
0, da Potentialdifferenzen orthogonal zu Zykeln sind

(2) \Rightarrow (3): trivial

(3) \Rightarrow (1):

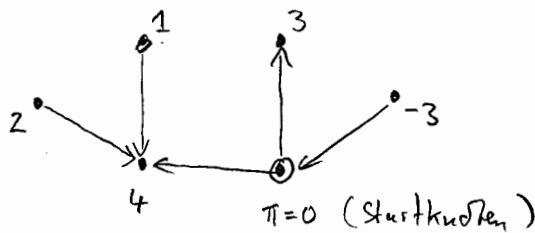


x erfüllt (3) bzgl $T=4$



Nutze Baum T zur Definition eines Potentials π auf V , so dass

$\pi_j - \pi_i = x_{ij}$ auf Baumkanten gilt (π ist nach Wahl von π_s in Startknoten s eindeutig bestimmt)



Für Nichtbaumkanten (u,v) gilt

$$\sum_{a \in E^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in E^-} (\pi_j - \pi_i) = 0 \quad \text{für den von } (u,v) \text{ erzeugten Fundamentalkreis } C \quad (\text{Orthogonalität})$$

$$= 0 = \sum_{\substack{a \in E^+ \\ a \neq (u,v)}} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in E^-} (\pi_j - \pi_i) + (\pi_v - \pi_u) =$$

$$= \sum_{\substack{a \in E^+ \\ a \neq (u,v)}} x_a - \sum_{a \in E^-} x_a + \pi_v - \pi_u$$

$$\stackrel{(3)}{=} \gamma_C \cdot T - x_{uv} + \pi_v - \pi_u$$

\uparrow
Viel Spaß für den Fundamentalkreis C
laut (3)

$$\Rightarrow x_{uv} = \pi_v - \pi_u + y_c T$$

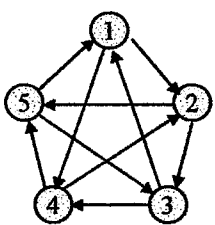
$\Rightarrow x$ ist periodisches Potenzial \square

Aufgabe 17: zu einer zulässigen periodischen Spannung x mit Periodenoffset p_a gibt es eine zulässige periodische Spannung y mit Periodenoffset q_a und $q_a = 0$ für alle Baumkanten

\Rightarrow Reduktion der Suche von Periodenoffsets auf die $m-n+1$ Nichtbaumkanten!

Die Charakterisierung in (3) gilt nicht für beliebige Basen

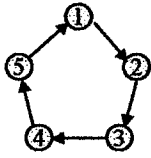
Characterization is not true for arbitrary basis



Outer 3-cycles and inner 5-cycle form a basis
Matrix Γ^T of incidence vectors is

	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(3,1)	(4,2)	(5,3)	(1,4)	(2,5)
C_1	1	1				1				
C_2		1	1				1			
C_3			1	1				1		
C_4				1	1				1	
C_5	1				1					1
C_6						1	1	1	1	1

$= \Gamma^T$



$$= \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_4 + \frac{1}{2}C_5 - \frac{1}{2}C_6$$

Example by B. Gerards

Beispiel zeigt, dass (3) \Rightarrow (2) verloren geht

\Rightarrow man braucht (3) für ganzzahlige Basis

= Basis des Zykelraums aus Kreisen, so dass jeder Kreis als ganzzahlige Linearkombination von Basiskreisen darstellbar ist

10.3 FOLGERUNG (Lichner & Peeters 03): Satz 10.2 bleibt gültig, wenn Eigenschaft (3) für Kreise eine ganzzahlige Basis erfüllt ist

Beweis: (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) wie bisher

(3) für SZB-Basis \Rightarrow (3) für Baum-Basis $\stackrel{\text{wie bisher}}{=} (1)$

\uparrow
denn: sei C Kreis aus Baum-Basis

$$\Rightarrow C = \sum_k \lambda_k \psi(C_k)$$

\uparrow Kreis aus SZB-Basis
SZB-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^T \psi(C) &= \sum_k \lambda_k \underbrace{x^T \psi(C_k)}_{= z_k \cdot T} \\ &= z_k \cdot T \quad z_k \text{ SZB wegen (3)} \\ &= \left(\sum_{\text{SZB}} \lambda_k z_k \right) T \end{aligned}$$

□

Frage: kann man ganzzahlige Basen charakterisieren?

Dazu: Definition der Zykelmatrix Γ einer Basis des Zykelraums

= Kanten-Basis-Kreise-Inzidenzmatrix

	C_1	...	C_v	
a_1				$v = m - n + 1$
\vdots				
a_m				

\uparrow
 $\psi(C_j)$

10.4 LEMMA: Seien Γ_1, Γ_2 zwei nicht-singuläre $v \times v$ Teilmatrizen von Γ

Dann gilt $\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2$

Beweis:

(1) Eine Teilmenge Γ' von v Zeilen von Γ ist maximal linear unabhängig
 \Leftrightarrow die entsprechenden Kanten sind Nichtbaumkanten eines
 spannenden Baumes

\Leftarrow Sei T ein spannender Baum und a_1, \dots, a_v die Nichtbaumkanten.

Sei Φ die Kanten-Fundamentalkreis Matrix bzgl. T

$\Rightarrow \exists v \times v$ -Matrix R mit $\Gamma R = \Phi$ (Linearkomb. der Kreise in Φ
 aus Kreisen in Γ)

Teilmatrix von Φ zu a_1, \dots, a_v ist Einheitsmatrix (nach geeigneter
 Permutation)

$$\text{d.h. } \Gamma' := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_v \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma' R = I \quad \Rightarrow R = (\Gamma')^{-1} \quad \Rightarrow \Gamma' \text{ nicht singular}$$

$\Rightarrow v$ Zeilen von Γ' sind (maximal) lin. unabhängig

\Rightarrow Ann. die $n-1$ Zeilen nicht in Γ' enthalten einen Kreis C

$\Rightarrow \varphi(C)$ eindeutig als LK des Kreises aus Γ darstellbar
 nichttriviale

$$\Rightarrow \exists \text{ Vektor } \lambda_C \text{ mit } \Gamma \cdot \lambda_C = \varphi(C)$$

Streiche in Γ und $\varphi(C)$ die Kanten aus $C \rightarrow \Gamma^0, \varphi(C)^0$

$$\Rightarrow \Gamma \cdot \lambda_C = \varphi(C) \text{ wird zu } \Gamma^0 \cdot \lambda_C = \varphi(C)^0 = 0$$

$\Gamma^0 \supseteq \Gamma'$
 $\Rightarrow \lambda_C$ kombiniert ^{die} Spalten aus Γ' zu 0

Widerspruch zur lin. Unabh. von Γ'

(2) $\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2$

(1) \Rightarrow Zeilen aus $\Gamma_1 \stackrel{\Delta}{=} \text{Nichtbaumkanten eines spann. Baumes } T_1$

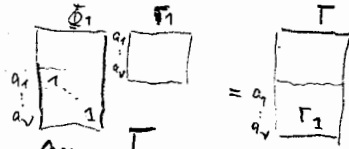
Sei Φ_1 Kanten-Kreis-Inzidenzmatrix bzgl. T_1

diese Matrizen sind vollständig unimodular

AUFGABE 17

$$\Phi_1 \cdot \Gamma_1 = \Gamma$$

← AUFGABE 18



Betrachte in Φ_1 und Γ nur die Zeilen aus T_2

$$\Rightarrow \Phi_1^0 \Gamma_1 = \Gamma_2$$

und Γ_1, Γ_2 nichtsingulär

$$\det \Phi_1^0 = \pm 1 \text{ da } \Phi_1 \text{ vollst. unimod.} \Rightarrow \det \Gamma_2 = \pm \det \Gamma_1 \quad \square$$

Wegen Lemma 10.4 ist folgende Definition sinnvoll

Sei \mathcal{C} eine Menge von ν Kreisen von G und sei $\Gamma_{\mathcal{C}}$ die Kanten-Kreis-Inzidenzmatrix zu \mathcal{C} . Dann heißt

$\det \mathcal{C} := |\det \Gamma'|$ mit Γ' entsteht aus Γ durch Streichen von Zeilen in einem (beliebigen) spannenden Baum von G

die Determinante von \mathcal{C}

10.5 FOLGERUNG: \mathcal{C} ist eine Basis des Zykelraums

$$\Leftrightarrow \det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+$$

Beweis " \Leftarrow " $\det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \det \mathcal{C} \neq 0 \Rightarrow \Gamma'$ nicht singular

\Rightarrow Spalten von Γ' lin. unabh.

\Rightarrow Spalten von $\Gamma =$ Kreise lin. unabh. \square

" \Rightarrow " Umkehrung des obigen Schlusses $\Rightarrow \det \mathcal{C} \neq 0$

Γ' spz $\Rightarrow |\det \Gamma'| \in \mathbb{Z}_+ \quad \square$

10.6 SATZ (Liebman 03):

\mathcal{E} ist eine ganzzahlige Basis $\Leftrightarrow \det \mathcal{E} = 1$

Beweis:

Aus LinA bekannt: $|\det B| = 1$ für SZZ Matrix $B \Leftrightarrow B^{-1}$ SZZ (1)

↑
unimodale Matrizen

Sei C ein beliebiger Kreis von G , sei λ_C der Vektor der Koeffizienten in der Lin. Komb. bzgl. Basis \mathcal{E} , d.h. $\Gamma_{\mathcal{E}} \cdot \lambda_C = \mathcal{F}(C)$

↑
überbestimmtes Gleichungssystem
m Zeilen, ν Spalten u. Variablen

Reicht zu lösen für ν lin. unabh. Zeilen

Nehme dafür die Nullbaumkanten a_1, \dots, a_ν bzgl. spann. Baum T

$$\Rightarrow \Gamma_{\mathcal{E}}^0 \lambda_C = \mathcal{F}(C)^0 \quad (2)$$

" \Rightarrow " Sei \mathcal{E} SZZ $\stackrel{10.5}{=} \Rightarrow |\det \Gamma_{\mathcal{E}}^0| \in \mathbb{Z}_+$ und λ_C SZZ

Betrachte Kreis C der durch a_j erzeugt wird $\Rightarrow \mathcal{F}(C)^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in a_j$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lambda_C = \Gamma_{\mathcal{E}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\Gamma_{\mathcal{E}}^{-1} \right)_{\text{Spalte } j} \quad \text{ist SZZ}$$

↑
SZZ

dies gilt für alle $j \Rightarrow \Gamma_{\mathcal{E}}^{-1}$ SZZ $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} |\det \Gamma_{\mathcal{E}}| = 1$

$$\Rightarrow \det \mathcal{E} = 1$$

" \Leftarrow " Sei $\det \mathcal{E} = 1 \Rightarrow$ (Cramersche Regel) $(\lambda_C)_j = \frac{\det(\Gamma_{\mathcal{E}}^0)^j}{\det \Gamma_{\mathcal{E}}^0}$ SZZ \square

Diese Erkenntnisse führen zu neuer MIP-Formulierung
 basiert auf Zusammenhang

$$\Gamma^T x = T \cdot q$$

Matrix der Basis
 transponiert $x \in \mathbb{R}^E$ Taktfrequenz
 gzz Vielfache für jeden Kreis
 der Basis
 d.h. $q \in \mathbb{Z}^V$

Basis
 Kreise

Knoten

$$\Gamma = T \cdot \begin{pmatrix} q_c \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Knoten

Vielfache der Basiskreise,
 q_c sind gzz. Variable

↑
 Standard gzz Basis

↑
 Gleichung entspricht Bed (3)
 aus Satz 10.2 und garantiert, dass
 x ein periodisches Potenzial ist

MIP auf Basis von Kreisvariablen q_c :

$$\min \sum_a w_a \cdot x_a$$

$$\text{unter } \Gamma^T x = T \cdot q$$

$$l \leq x \leq u$$

$$q \text{ gzz}$$

10.7 LEMMA Ist q bekannt, so ergibt sich x hieraus in
 polynomialer Zeit und x ist ebenfalls gzz.

Beweis: Sei q $g \geq z$ und fest

$\Rightarrow x$ wird bestimmt durch Lösung des LP $\min \sum_a w_a x_a$ unter

$$\Gamma^T x = T \cdot q, \quad l_a \leq x_a \leq u_a$$

\Rightarrow polynomial (z.B. innere Punkte Methode oder einfache Methode bei speziellen Basen)

$$\left. \begin{array}{l} \det T = 1 \\ q \text{ } g \geq z \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(Cramer)} \quad x \text{ } g \geq z \quad \square$$

Fragen:

1. Was sind "gute" Basen für dieses MIP $\rightarrow \S 11$
2. Wie sieht die Landschaft der $g \geq z$. Basen aus?



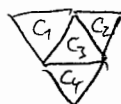
10.8 SATZ Die folgenden Kreisbasen sind $g \geq z$. Basen:

(1) die Fundamentale Kreise bzgl. eines spannenden Baumes
 "Fundamentale Kreisbasen"

(2) Jede Menge von v Kreisen C_1, C_2, \dots, C_v mit der
 Eigenschaft $C_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \neq \emptyset$
 "schwache Fundamentale Kreisbasen"

(3) Die Menge der Facetten (außer der äußeren) eines
 planaren Graphen

"2-Basis"



Beweis + Überlegung wie man für diese Basen
des Gleichungssystem $\Gamma^T x = Tq$ nach x löst

= Aufgabe 19