


III Periodic Event Scheduling und Taktfahrplanoptimierung

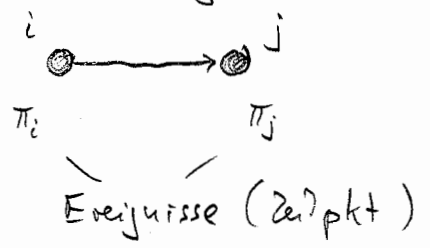
§9 Das Periodic Event Scheduling Problem (PESP)

Motivation aus Taktfahrplanung

- haben Linien  = Folge von Stationen
- Suchen
Ankunft und Abfahrzeiten an - Bahnhöfen
- anderen wichtigen Punkten
- so dass zeitliche Nebenbedingungen eingehalten werden
- der Fahrplan sich periodisch wiederholt
- eine Ziel-fkt. minimiert wird (z.B. die Umsteige-wartezeit)
über alle Passagierströme

8.1 Kern des mathematischen Modells = PESP

Abstände entlang einer gerichteten Linie = Kanten eines Digraphen

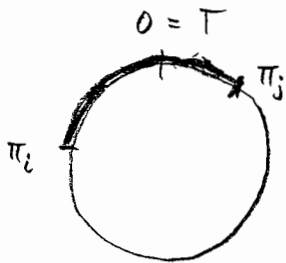


zeitliche Bedingungen an Zeitpunkte
zwischen π_i und π_j

$$l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij} T \leq u_{ij}$$

↑
ganzzahliges Vielfaches
des Taktzeit T

liegt daran, dass sich
die Ereignisse periodisch wiederholen,
d.h. die Zeitachse ist ein Kreis



$$\pi_j - \pi_i + 1 \cdot T \in [l_{ij}, u_{ij}]$$

Graphentheoretisch:

Zulässiges Potenzialproblem, aperiodischer Fall

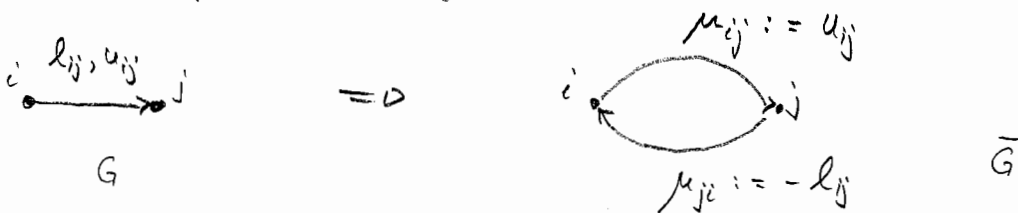
Gegeben: Digraph G

Schranken l_{ij}, u_{ij} für jede Kante (i,j)

Gesucht: Potenzial π mit $\pi_j - \pi_i \in [l_{ij}, u_{ij}]$ "zulässiges Potenzial"

⇓

Reduzierbar auf kürzeste Wege - Problem



Claim: π ist zulässig $\Leftrightarrow \pi_j - \pi_i \leq \mu_{ij}$ für alle Kanten (i,j) in \bar{G}

(*)

Beweis: π zulässig $\Leftrightarrow l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} \quad \forall (i,j)$

$\Leftrightarrow \pi_j - \pi_i \leq u_{ij}$ und $\pi_i - \pi_j \leq -l_{ij} \quad \square$

9.1 SATZ: (1) (*) ist erfüllt $\Leftrightarrow \bar{G}$ hat keine Zyklen negativer Länge

(2) Ist (*) erfüllt, so erhält man ein zulässiges Potenzial π auf

folgende Weise:



a) Führe Knoten s mit Kanten zu jedem v in \bar{G} ein

b) $\pi(v) :=$ kürzeste Weglänge von s nach v

Beweis = AUFGABE 16 (Lb. ADM I)

Zulassiges Potenzialproblem, periodisches Fall zur Taktrate T

periodisches Potenzial mit Taktrate T

ist Zahl π_i für jeden Knoten i

mit $\pi_i \in \{ \pi_i^0, \pi_i^0 \pm T, \pi_i^0 \pm 2T, \dots \}$ und $\pi_i^0 \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

zulassiges periodisches Potenzial bzgl T, l_{ij}, u_{ij}

ist ein periodisches Potenzial mit

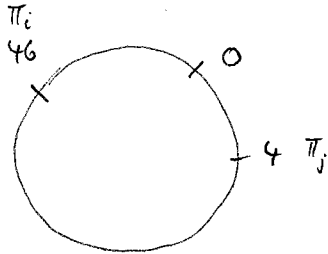
$$l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} \quad \text{für alle Kanten } (ij)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \searrow & \\ \pi_j^0 + k_j \cdot T & \pi_i^0 + k_i \cdot T & k_i, k_j \in \mathbb{N} \end{array}$$

\Rightarrow Bedingung ist äquivalent zu

$$\boxed{l_{ij} \leq \pi_j^0 - \pi_i^0 + p_{ij} \cdot T \leq u_{ij} \quad \text{mit } p_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall (ij)} \quad (*)$$

Bsp:
T = 60 min



$$\pi_j - \pi_i \in [10, 20]$$

algebraisch

$$\boxed{l \leq \theta^T \pi - p \cdot T \leq u, p \in \mathbb{Z}^A}$$

Schreibweise: $\pi_j - \pi_i \in [l_a, u_a]_T \Leftrightarrow l_a \leq (\pi_j^0 - \pi_i^0) + p_a T \leq u_a$
für ein $p_a \in \mathbb{Z}$

Def: $d \bmod T := \min \{ d + zT \geq 0, z \in \mathbb{Z} \}$

"Modulo Projektion" $\pi_i \mapsto \pi_i^0$

$$(*) \Leftrightarrow (\pi_j - \pi_i - l_a) \bmod T \leq u_a - l_a$$

$$\underbrace{4 - 46 = -42}_{\text{mod } 60} \leq \underbrace{20 - 10}_{10}$$

Periodic Event Scheduling Problem PESP

Ges: Digraph D mit Kantenrestriktionen $\Delta_a = [l_a, u_a]$, Taktrate T

Ges: Fahrplan (^{zulässiges} periodisches Potential) π, τ

d.h. π erfüllt Bed. (*) bzgl T

Beobachtung: Jedes ^{zulässige} relaxierte Potential ist periodisch!

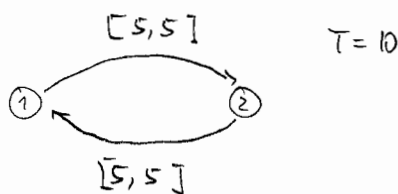
denn: Sei π ^{zul.} Potential bzgl Δ_a

$$\Rightarrow l_a \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a \quad \text{für } a: i \rightarrow j$$

$$\Rightarrow l_a \leq (\pi_j^0 - \pi_i^0) + p_a T \leq u_a \quad \text{für } p_a = 0 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \pi$ ist ^{zul.} periodisches Potential \square

Die Umkehrung gilt nicht:



$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ erfüllt (*)}$$

\nexists periodisches relaxiertes Potential

Bed. (*) weist:

$$\text{zul. periodisches Potential} = \text{zul. Potential} + \text{Periodenoffsets}$$

$$p_a \in \mathbb{Z}, a \in A$$

\uparrow
einfach falls p_a gegeben!

$$l_a \leq \pi_j - \pi_i + p_a \cdot T \leq u_a \Leftrightarrow l_a - p_a T \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a - p_a T$$

\leftarrow relaxiertes Potentialproblem \square

alternative Formulierung des PEST über

$$\begin{array}{ccc} \text{Spannungen } x_{ij} & = & \text{Potentialdifferenzen } \pi_j - \pi_i \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Knotenvariable} & & \text{Knotenvariable} \end{array}$$

periodische Spannung = Spannung erzeugt von Potentialdifferenz eines periodischen Potentials π

d.h. $x_{ij} = \pi_j^0 + k_j T - (\pi_i^0 + k_i T)$ für

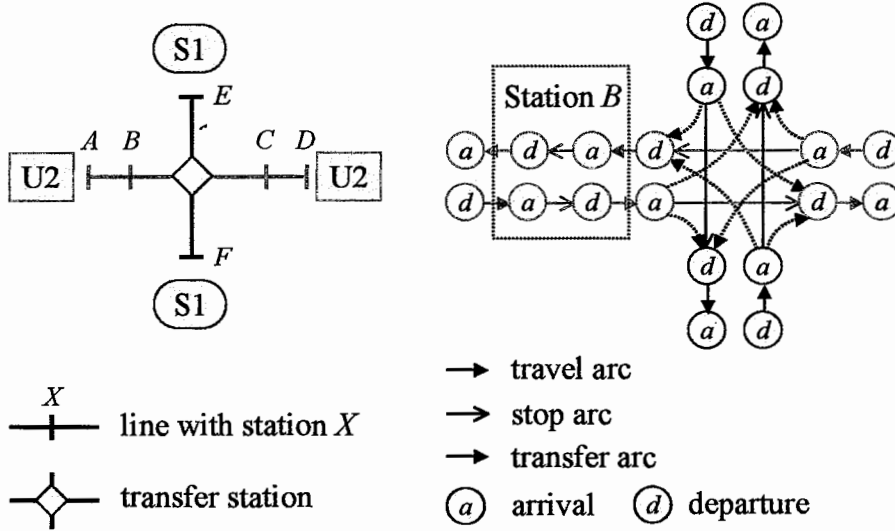
zulässige periodische Spannung x siehe k_i, k_j

$$\Leftrightarrow l_{ij} \leq x_a + p_a T \leq u_{ij} \quad \forall \text{ Kanten } a = (i, j)$$

später mehr dazu, wie man an einem x Vektor erkennt, ob er eine periodische Spannung ist

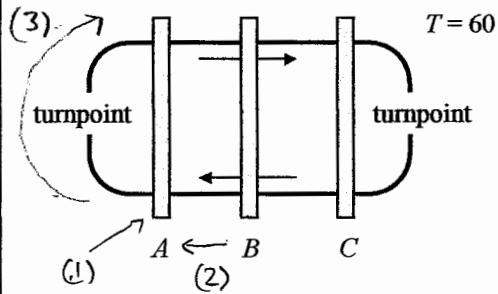
9.2 Modellierungsmöglichkeiten mit dem RESP

Traffic lines and graphs



Example: Temporal conditions on a single line

Beispiel 1



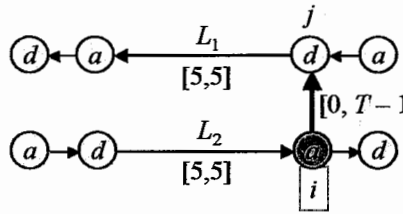
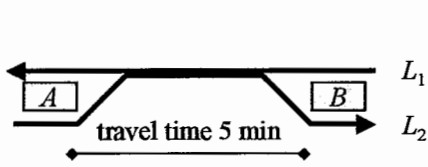
- (1) Stopping conditions in A
 $\pi_{\text{dep in } A} - \pi_{\text{arr in } A} \in [2, 4]_T$
 xx:59 arr in A
 xx:02 dep in A

- (2) Travel condition
 $-\pi_{\text{dep in } B} + \pi_{\text{arr in } A} \in [11, 11]_T$
 xx:48 dep in B
 xx:59 arr in A

- (3) Turning condition
 $\pi_{\text{dep in } A} - \pi_{\text{arr in } A} \in [5, 10]_T$
 xx:02 dep in A
 xx:10 arr in A

Eingelassige Streckenabschnitte

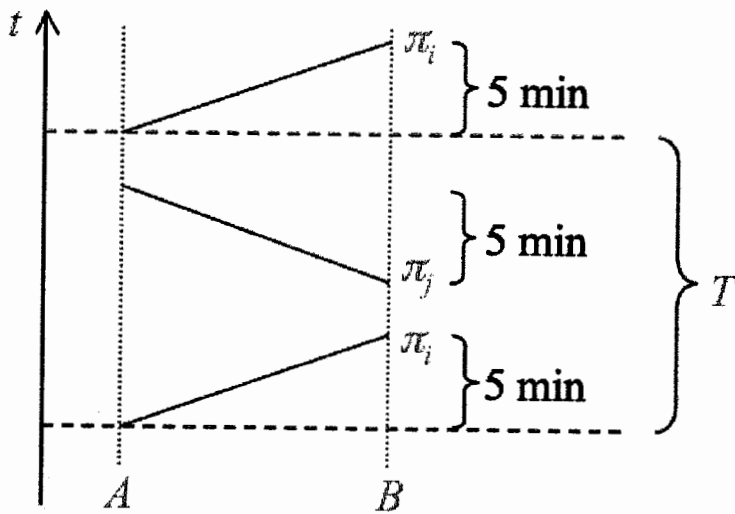
Beispiel 2



modelliert
Eingelassigkeit

Begründung:

Betrachte Weg-Zeit Diagramm



$$\Rightarrow \pi_i + T \geq \pi_j + 2.5 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \pi_j \geq \pi_i \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow 0 \leq \pi_j - \pi_i \quad (2) \Rightarrow \pi_j - \pi_i \leq T - 10$$

$$\Rightarrow \pi_j - \pi_i \in [0, T - 10]_T$$

Umkehrung: Sei $\pi_j - \pi_i \in [0, T - 10]_T$

$$(i) \quad 0 \leq \pi_i \leq \pi_j \leq T \quad \Rightarrow \pi_j - \pi_i \geq 0$$

(o.B.d.A Taktintervall verschieben, so dass dies gilt)

$$(ii) \quad 0 \leq \pi_j \leq T \leq \pi_i$$

↑
o.B.d.A kleineres
derartiges π_i

Voraus. $\Rightarrow \pi_j - \pi_i + T \leq T - 10$

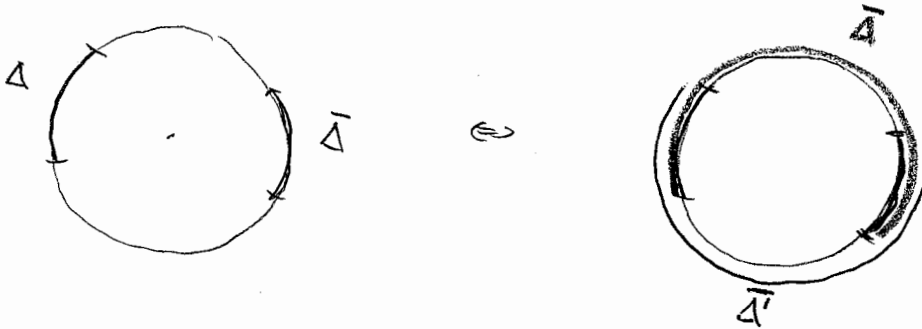
$$\Rightarrow \pi_i - \pi_j \geq 10$$

\Rightarrow kein Treffen \square

Disjunktive Bedingungen

Beispiel 3

$$\pi_j - \pi_i \in \Delta_T \quad \text{oder} \quad \pi_j - \pi_i \in \Delta'_T$$



$$\pi_j - \pi_i \in \bar{\Delta}_T \quad \text{und} \quad \pi_j - \pi_i \in \Delta'_T$$

=> starke Modellierungsmöglichkeiten!

Weitere Modellierungsmöglichkeiten:

- Zeit zwischen aufeinanderfolgenden Zügen
- Treffen an bestimmten Bahnhöfen zwecks Umsteigen
- Fixierte Ereignisse (Anschluss an andere Verkehrsmittel)
- # Fahrzeuge (indirekt über Fahrzeit entlang einer Linie)



alles als unlössiges periodisches Potenzialproblem modellierbar

System von Ungleichungen in Knotenvariablen π_i
 Ungleichungen entsprechen Kanten eines Graphen
 haben Periodizitätsbedingung

Modellierung von Optimierungskriterien

Lineare Zielfunktion $\sum_a w_a \cdot x_a$

(1) gewichtete Summe der Umsteigezeiten

(2) Gesamtfaktoriel entlang Fahrkanten (bei festen Fahrzeiten $x_a \in [t_a, t_a]_+$)
 $\stackrel{!}{=} \# \text{ Fahrzüge}$

(1) und (2) sind gegenläufige Ziele!

daher meist nur (1) oder (2) mit Nebenbedingung an die jeweils andere in Form von PESP-constraints

↓

Man erhält MIP

$$\text{min } \sum_a w_a x_a$$

$$\text{unter } x_a = \pi_j - \pi_i \quad \forall a = (i, j)$$

$$l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a \quad \forall a$$

$$0 \leq x_a \leq T-1$$

$$p_a \text{ ganzzahlig, } x_a, \pi_i \text{ reell}$$

schon schon lösbar, bereits bei kleinen Instanzen

2 Instanzen zu MIPLIB beigetragen: timetab1 und timetab2

(10 ICE/IC Züge, 40 Umsteigebeziehungen)

$$\Rightarrow \text{(nach preprocessing) } n = 56 \text{ bzw } 88$$

$$m = 226 \text{ bzw } 381$$

erst 2009 in Diplomarbeit in $\leq 24h$ lösbar mit neuen Schnittbenen
 erst kürzlich in CPLEX

9.3 Komplexität des PESP

Das aperiodische zulässige Potenzialproblem ist in P
(folgt aus Satz 9.1)

9.2 SATZ: Das periodische zulässige Potenzialproblem ist stark NP-schwer, selbst für festes $T \geq 3$

[Nachjall 96]

Beweis: Reduktion von k-Färbbarkeit von Graphen

Gegeben: ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: Kann G mit k Farben gefärbt werden?

Betrachte Instanz von k-Färbbarkeit.

Konstruiere PESP-Instanz wie folgt:

$D =$ Digraph, der aus G durch beliebige Orientierung der Kanten von G entsteht

$a \in A(D) \rightarrow [l_a, u_a] := [1, T-1]$ mit $T := k$

Dann gilt:

π ist zulässiges periodisches Potenzial

$$\Leftrightarrow 1 \leq \pi_j - \pi_i + p_a \cdot T \leq T-1 \quad \forall a$$

$$\Leftrightarrow \pi_i \neq \pi_j \pmod{T} \quad \forall a$$

$$\Leftrightarrow \pi_i \pmod{T} \text{ definiert eine } k\text{-Färbung von } G \quad \square$$

Der Kern der NP-Vollständigkeit ist das Finden der Perioden-Offsets p_a .

Für gegebene p_a ist das Entscheidungsproblem in P.

$$\text{da } l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_a T \leq u_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{l_{ij} - p_a T}_{\text{feste Zahl}} \leq \pi_j - \pi_i \leq \underbrace{u_{ij} - p_a T}_{\text{feste Zahl}}$$

feste
Zahl

feste
Zahl

↑

entspricht aperiodischem zulässigem Potenzialproblem

Ebenso ist das MIP leicht, wenn die p_a bekannt sind

Entsprechendes gilt für

MAX-T-PESP

Gegeben: Digraph G mit l_a, u_a für jede Kante a , $T \in \mathbb{N}$

Gesucht: Potenzial π mit

$$l_a \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a \quad \forall a = (i, j) \in A'$$

mit $|A'|$ so groß wie möglich

9.3 SATZ: MAX-T-PESP ist für jedes $T \geq 2$
MAXSNP-vollständig

Beweis: Durch L-Reduktion von MAX-2-COLORING \square