

§8 Dynamische Flussprobleme mit flussabhängigen Fahrzeiten τ_a

Sehr schwierig exakt zu behandeln

In Praxis daher meist Simulation

↑ ausgefeiltes Fahrerverhalten
spätkoll, Semaphorfahrer, ...

Ein Grund für die Schwierigkeit:

- kein reexpandierender Graph G^T

↑ basiert auf festen Fahrzeiten

d.h. G^T würde sich dauernd ändern im dynamischen Fall

in COGA: 2 vereinfachte Modelle

- 1) Einfluss-abhängige Fahrzeiten (Köhler, Langkan, Skutella)
- 2) Last-abhängige Fahrzeiten (Köhler, Skutella)

zu 1)

- $x_a(\theta) :=$ Flussrate zum Zeitpkt θ rein in die Kante a
- Fluss der Kante a zum Zeitpkt θ benötigt benötigt $\tau_a(x_a(\theta))$ Zeit zum Durchfahren der Kante
- alle diese Flusseinheiten haben die selbe Fahrzeit, die also nur vom Eintrittszeitpunkt θ abhängt

zu 2) • $y_a(\theta) :=$ Flussmenge auf Kante a zum Zeitpkt θ

- Flusseinheiten auf a fahren zum Zeitpkt θ mit Geschwindigkeit $1/\tau_a(y_a(\theta))$

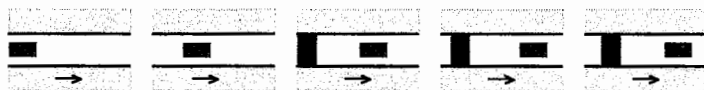
- zu jedem Zeitpunkt θ haben alle Flusseinheiten auf a dieselbe Geschwindigkeit (die ändert sich jedoch mit θ)

Beide Modelle haben eine gewisse Praxisferne

Inflow dependent model: does not satisfy First-In First-Out property



Load dependent model: later arriving flow influences earlier flow



ABER... • Man kann in ihnen optimieren

- Kosten aus der Optimierung zeigen sich in der Simulation den aus der Simulation ermittelten Kosten überlegen

(laufende Forschung BMBF Projekt ADVEST)

Ergebnisse in der Übersicht:

zu 1) Einfluss-abhängige Faktoren

- schnellste s,t Fluss Problem ist stark NP-schwer
- schnellste s,t Fluss Problem hat einfache $(2-\epsilon)$ -Approximation mit zeitlich wiederholten Flüssen
- ausbaubar zu Approximationschema (FPTAS) (alles hängt mit unidirektionalen Flüssen)

zu 2) Last-abhängiges Modell

- $(2+\epsilon)$ -Approximation mit viel wiederholten Flüssen für schnellste s, t -Fluss Problem
- Problem ist APX-schwer, daher kein Approximationsschema (außer $P=NP$)

Approximationsergebnis zu 1:

Betrachten schnellstes s, t -Fluss-Problem mit Einfluss-abhängigen Faktoren

A: Schnellstes s, t -Fluss-Problem mit konstanten Faktoren

Nutze binäre Suche bzgl Zeithorizont T und löse für jedes T ein maximales dynamisches s, t -Fluss-Problem gemäß § 5.1

Problem: optimales Zeithorizont muss nicht ganzzahlig sein
 \Rightarrow nur ϵ -Approximation durch binäre Suche möglich

ABER (Fleischer & Tardos 98):

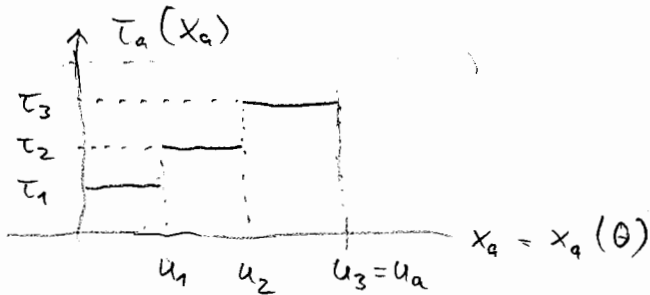
Alle τ_a und Demand d $\geq \epsilon$

\Rightarrow optimales Zeithorizont ist rationale Zahl $\frac{p}{q}$
mit $q \leq$ Wert eines minimalen s, t -Schrittes

\Rightarrow exakte binäre Suche in polynomieller Zeit möglich

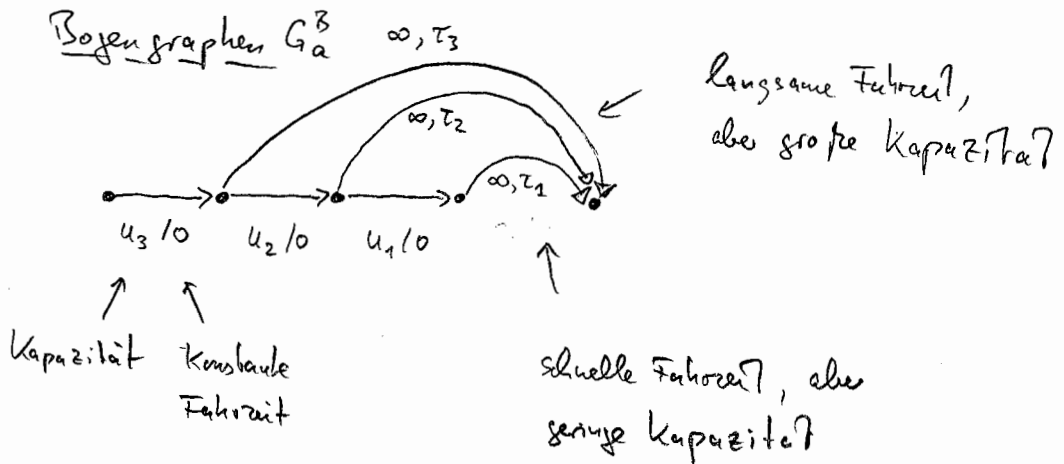
8.1 SATZ: Für das schnellste s, t -Fluss Problem mit konstanten Fahrzeiten existiert ein optimales Fluss, das zeitlich wiederholt ist, und ein solches kann in polynomiales Zeit ermittelt werden

B: Schnellster s, t -Fluss Problem mit stückweise konstanten Fahrzeiten



1. Konstruiere für jede Kante a aus der Funktion $\tau_a(x_a)$

einen Bogengraphen G_a^B



2. Ersetze jede Kante a durch ihren Bogengraphen und ermittle im resultierenden Graphen G^B einen schnellsten s, t Fluss f^B gemäß A,

• setzt, da alle Fahrzeiten konstant

• ergibt einen Zeithorizont $T^B \leq T^{OPT}$ (8.1)

da jeder Fluss in G zulässig in G^B ist,

(i.A. gibt es den mehr Fluss in G^B , da ein Fluss entlang Kante a in G geht und mehreren Geschwindigkeiten in G_a^B reisen kann)

- Kanten in G_a^B sind von unten nach oben gesättigt
(sonst lässt sich Fluss nach unten verschieben und die Fahrzeit verbessern; dies geht, da auf unterem Weg Fluss fließt)
- f^B ist zeitlich wiederholt in G^B
(aber i.A. nicht zulässig in G)

3. Konstruktion eines ^{in G} zulässigen (zeitlich wiederholten) Flusses aus f^B

f^B wurde aus Max. dyn. s, t -Fluss zum Zeitkoeffizient T^B gewonnen
↑
letztes T bzgl.
binäre Suche

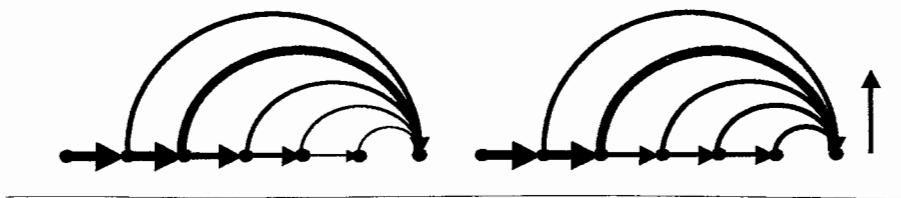
§. 6

$\Rightarrow f^B$ wurde zeitlich wiederholt aus stationärem Fluss x^B in G^B gewonnen

- route x^B so dass es nicht mehrere Bögen in G_a^B benutzt.
dazu: schiebe allen Fluss in G_a^B auf den höchsten Fluss-führenden Bogen

der resultierende stationäre Fluss sei x

$\Rightarrow x$ lässt sich als Fluss in G interpretieren



x ist kleinerweise ein statischer Fluss (Flusseshaltung usw.) in G

x nutzt nur Wege, die auch in x^B genutzt werden

\Rightarrow Länge dieser Wege ist $\leq T^B$, da x^B optimal für T^B
 \uparrow vgl. §6

• Nutze diese Wege (in G interpretiert) zur Konstruktion eines zeitlich wiederholten Flusses f

- sende zeitlich wiederholt entlang der Wegesetzung von x^B

- bis zum Zeithorizont T' , der so gewählt wird

dass bei T' der Demand d in t angekommen ist,

$$\text{also } \text{value}(f) = \underbrace{\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \cdot (T' - \tau_P)} = d$$

$$= T' \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a$$

\Downarrow
 T' einfach ermittelbar

8.2 SATZ: f löst das schnellste dynamische s, t -Flussproblem mit stückweise konstanten Fahrzeiten in einer Zeit

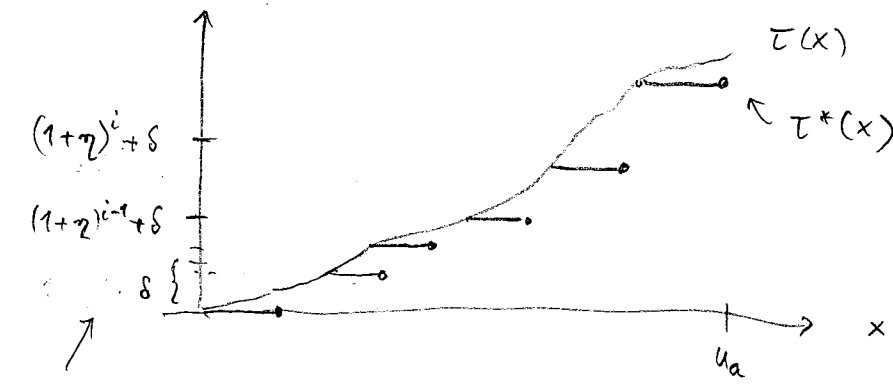
$$T' \leq 2 \cdot T_{OPT}$$

Beweis: Sei $\text{value}(T) :=$ Wert von f bei Zeithorizont T

$$= \underbrace{T}_{\uparrow \text{§6}} \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a \quad (8.2)$$

C. Schnellstes s,t-Fluss-Problem mit beliebigen (monotonen, linksseitig stetigen) Faktorfunktionen

Approximation solcher Faktorfkt. durch stückweise konstante Fkt. τ^*



wie bei
Fließkoma
Zahlen

$$\tau^*(x) \leq \tau(x) \leq (1+\eta)\tau^*(x) + \delta \quad \forall x$$

$$\# \text{ Konstant-Stücke} \leq \lceil \log_{1+\eta} (\bar{c}_a(u_a) - \delta) \rceil + 1$$

↓

$2+\epsilon$ Approximation für beliebiges $\epsilon > 0$

$(\frac{3}{2} + \epsilon)$ Approximation für konkave Faktorarten

AUFGABE