

§7 Dynamische Multicommodity-Fluss Probleme mit konstanten Fahrzeiten

The complexity landscape of network flows

	<i>s-t</i> flow	trans-shipment	min-cost	quickest multi-commodity
static	poly		poly	poly (LP)
over time	poly (static min-cost flow)	poly (minimize submodular functions)	pseudo-poly NP-hard	pseudo-poly (LP) NP-hard

[Ford & Fulkerson 1958] [Hoppe & Tardos 2000] [Fleischer & Skutella 2002/03] [Klinz & Woeginger 1995]

FPTAS

Hier nur: 2-Approximation für schnellste Multi-Commodity Flows

Gegeben: Digraph G mit Quellen-Senken Paaren (s_i, t_i) und Demand d_i

Gesucht: beste Zeit T in der alle Demand durch dynamischen Fluss geroutet werden kann
(erste Annäherung an Verkehrssituation)

pseudopolynomial lösbar durch Zeitexpansion

Für Approximation betrachte:

statischer Durchschnittsfluss \times in dynamischen Fluss f mit Horizont T

$$\text{def. durch } x_a := \frac{1}{T} \int_0^T f_a(\theta) d\theta$$

7.1 LEMMA: Der statische Durchschnittsfluss x zu f erfüllt Kapazitätsbed. und Fluss conservation (d.h. ist Fluss).

$$\text{Ferner gilt } \text{value}(x) = \frac{1}{T} \text{value}(f), \quad c(x) = \frac{1}{T} c(f)$$

Beweis: $f_a(\theta) \leq u_a \quad \forall \theta \Rightarrow$ Kapazitätsbed.
 $\Rightarrow x_a \leq \frac{1}{T} \int_0^T u_a d\theta = u_a$

Fluss conservation: Am Ende von T muss f die Fluss conservation mit "=" erfüllen

$$\Rightarrow \sum_{a \in \delta^-(v)} \underbrace{\int_{\tau_a}^T f(\theta - \tau_a) d\theta}_{= T \cdot x_a} = \sum_{a \in \delta^+(v)} \underbrace{\int_0^T f_a(\theta) d(\theta)}_{= T \cdot x_a}$$

Flusswert

Analog zu Fluss conservation $\Rightarrow \text{value}(f) = T \cdot \text{value}(x)$

Kosten:

$$c(f) = \sum_{a \in A} \int_0^T f_a(\theta) \cdot c_a \cdot d\theta = \sum_{a \in A} c_a T x_a = T c(x) \quad \square$$

7.2 LEMMA: Der statische Durchschnittsfluss x zu f mit Zeithorizont T ist laugenbeschränkt mit Schranke T , d.h. es gibt eine Pfadzerlegung für jedes s, t mit $\tau_p \leq T$ für alle Pfade in der Zerlegung

Beweis: Nütze die Wege bzgl f , diese erfüllen $\tau_p \leq T \quad \square$

Algorithmus zur Konstruktion eines schnellsten Multi-Commodity
Flusses, der die demands erfüllt, mit Kosten $\leq c$ (c Input)

[Fleischer & Skutella 2002]

- (1) Errate den optimalen Zeithorizont T^* für (2) (lineare Suche)
- (2) Berechne einen T^* -Längen beschränkten statischen MC-Fluss
 $(x_p)_{p \in P}$ mit (später, wie)
 $\text{value}_i(x) = \frac{1}{T^*} d_i$ und $c(x) \leq \frac{1}{T^*} c$
- (3) Konstruiere aus x einen dynamischen Fluss f
 indem entlang $P \in P$ ein zeitlich wiederholter Fluss mit
 Raten x_p im Zeitraum $[0, T^*[$ losgeschickt wird
- (4) Warte bis aller Fluss in den Senken angekommen ist

7.3 SATZ (Fleischer & Skutella 02)

f ist ein dynamischer Fluss mit Zeithorizont $\leq 2T^*$, der
 alle Demands erfüllt und Kosten $\leq c$ hat

Beweis: Flusserhaltung, Kapazitätsbed. klar
 keine Speicherung von Fluss in Knoten

$$\text{value}_i(f) = \sum_{p \in P_i} T^* \cdot x_p = T^* \text{value}_i(x) = d_i \quad \text{für Knotenpaar } (s_i, t_i)$$

$$c(f) = \sum_{p \in P} c_p \cdot T^* x_p = \sum_{p \in P} \left(\sum_{a \in P} c_a \right) T^* \cdot x_p$$

$$= T^* \cdot \sum_{a \in A} c_a \sum_{p \ni a} x_p = T^* \sum_{a \in A} c_a x_a = T^* c(x) \leq c$$

Zeilwert klar, da $\tau_p \leq T^*$ \square

Offener Punkt: Konstruktion des T^* -längen beschränkten MC Flusses
 in Schritt (2) bzw. Feststellung, dass Kerner
 existiert (bgl. der binären Suche nach T^*)



Ist schwach NP-vollständig, enthält CSP als Spezialfall

ABER: es gibt ein FPTAS wie für CSP

d.h. Falls es einen T -längen beschränkten statischen Fluss x
 gibt, so kann man einen $(T+\epsilon)$ -längen beschränkten
 Fluss x' konstruieren mit Kosten $c(x') \leq c(x)$
 in polynomialer Zeit in der Inputgröße und $\frac{1}{\epsilon}$

Idee: Formuliere das Finden eines T -längen beschränkten Flusses x
 als LP in Pfad Variablen

\Rightarrow das duale Separierungsproblem ist ein CSP

unter Äquivalenz von Separierung und Optimierung ADMP

AUFGABE 15

Volles PTAS für das Ausgangsproblem durch

Kondensieren des zeitexpandierten Netzwerkes, d.h. Skalierung

so dass T/Δ polynomial ist, Faktoren runden

Löse statisches Flussproblem in kondensierten Graphen (polynomial)

Interpretiere Lösung als dynamischen Fluss mit ursprünglichen



Faktorzeiten

muss "glätten" um Kapazitäten einzuhalten

7.4 SATZ (Flusslos & Skutella 03)

Wählt man $\Delta := \epsilon^2 T / n$, so erhält man ein kondensiertes

zeitexpandiertes Netzwerk mit n/ϵ^2 Zeitscheiben, das $(1+\epsilon)$ -approximative

schnellste Mehrperiodenflüsse mit beschränkten Kosten liefert

Quintessenz: Dynamik kostet Faktor $|V|/\epsilon^2$ bzgl. Netzwerkgröße
bei der Berechnung