II. Dynamische Flüsse

§6 Dynamische s,t Flüsse mit konstanten Fahrzeiten

bisher: Rush Hour = statischer Fluss

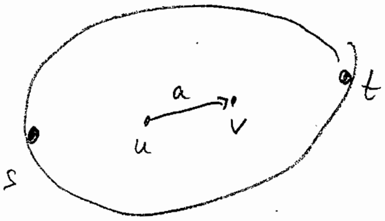
d.h. in einem Zeitraum auf ganzem Weg P konstante Flussrate f_P

Modell nicht mehr zutreffend außerhalb der Rush hour.

$\Rightarrow$ müssen zeitliches Verhalten des Flusses mit modellieren

wichtig auch für logistische Anwendungen

6.1 Maximale s,t Flüsse bei konstanten Fahrzeiten



Kante a hat Kapazität $u_a \in \mathbb{N}$

Zeit $\tau_a \in \mathbb{N}$

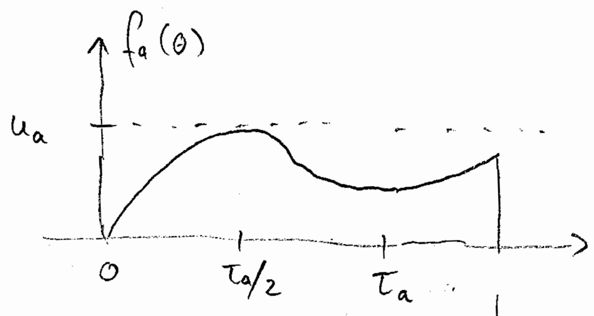
↑ benötigt zum Durchqueren der Kante

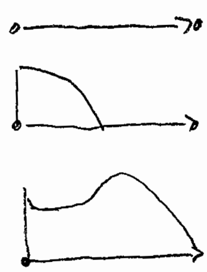
zusätzlich Zeithorizont T gegeben

Dynamischer Fluss f mit Zeithorizont T

= Funktionen $\underbrace{f_a : [0,T[\to \mathbb{R}^1_+}$ für alle Kanten $a \in A$

$f_a(\theta)$ = Flussrate in Kante a zum Zeitpkt θ





$\theta = 0$

$\theta = \frac{\tau_a}{2}$

$\theta = \tau_a$

→ "umgekehrtes Bild" auf Kante

zur Zeit $\Theta \geq \tau_a$ kommt $f_a(\Theta - \tau_a)$ am Kopf der Kante an

Ein <u>dynamischer Fluss mit Zeithorizont T</u> erfüllt

(1) die Kapazitätsbedingungen:

$$f_a(\Theta) \leq u_a \quad \forall \Theta \in [0,T[$$

Kapazitäten beschränken die Flussrate

(2) Flusserhaltungsgleichungen (kein Defizit an Knoten gestattet)

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} \int_{\tau_a}^{\Theta} f_a(\xi - \tau_a)\, d\xi \geq \sum_{a \in \delta^+(v)} \int_{0}^{\Theta} f_a(\xi)\, d\xi \quad \forall \Theta$$

Einfluss bis Θ Ausfluss bis Θ

">" $\hat{=}$ Warten in Knoten erlaubt

"=" $\hat{=}$ kein Warten erlaubt

(3) "=" muss gelten zum Zeitpkt T
und $f_a(\Theta) = 0$ für $\Theta > T - \tau_a$ (Fluss hat Netzwerk verlassen nach Zeit T)

Wert des zulässigen Flusses f:

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} \int_0^T f_a(\Theta)\, d\Theta - \sum_{a \in \delta^-(s)} \int_{\tau_a}^{T} f_a(\Theta - \tau_a)\, d\Theta$$

$$= - \sum_{a \in \delta^+(t)} \int_0^T f_a(\Theta)\, d\Theta + \sum_{a \in \delta^-(t)} \int_{\tau_a}^{T} f_a(\Theta - \tau_a)\, d\Theta$$

= Nettoausfluss aus s = Nettoeinfluss in t

Maximales dynamisches s,t-Fluss Problem

Gegeben: Digraph $G=(V,A)$, $s,t \in V$, u_a, τ_a, Zeithorizont T

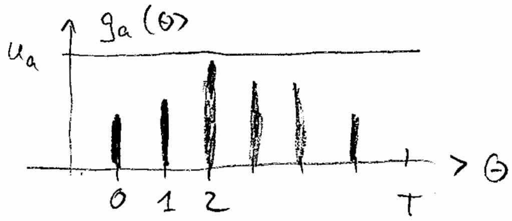
Gesucht: dynamischer s,t-Fluss f in $[0,T]$ mit maximalem Flusswert value(f)

6.2 Diskrete vs. stetige Zeit

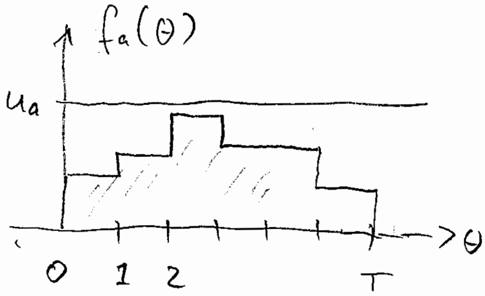
bisherige Definition nutzt stetige Zeit

diskrete Zeit $\hat{=}$ sende Fluss nur zu Zeitpkt. $0, 1, 2, \dots$

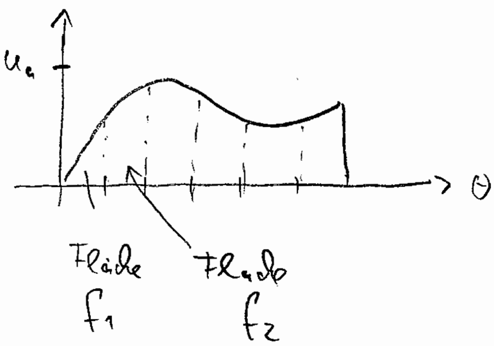
diskreter Fluss g



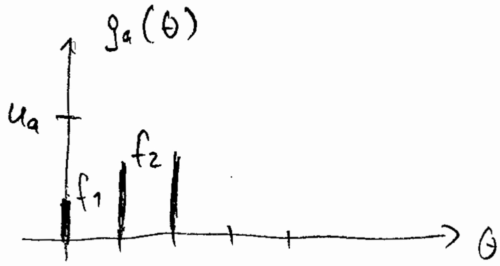
Transformation $\longrightarrow$ in stetigen Fluss



stetiger Fluss $f_a(\theta)$



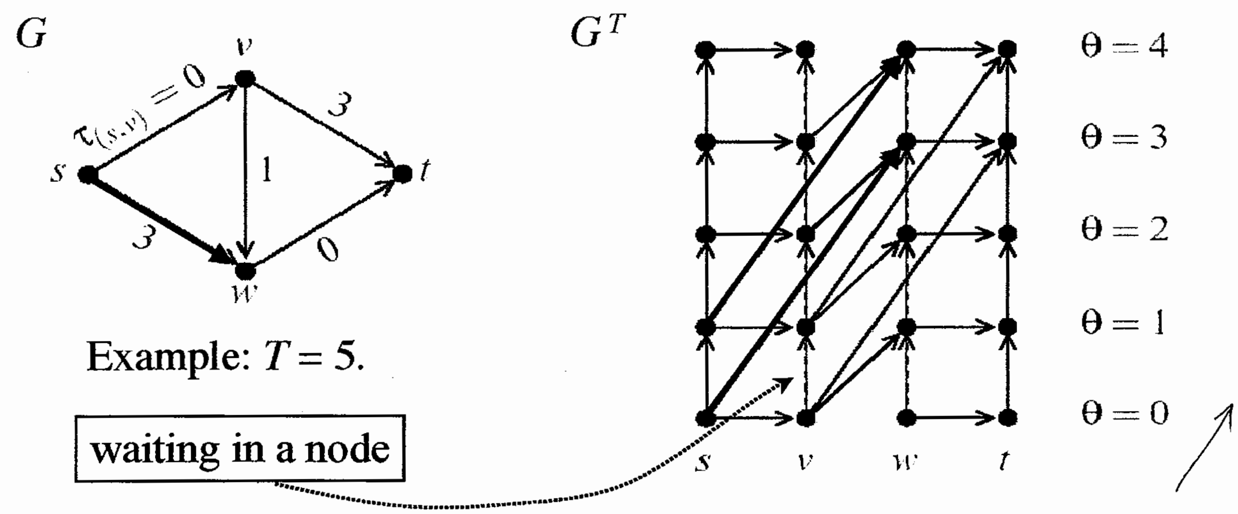
Transformation $\longrightarrow$ in diskreten Fluss



Beobachtung: Bei hinreichend feiner Diskretisierung der Zeit kann jeder diskrete dynamische Fluss als stetiger dynamischer Fluss interpretiert werden und umgekehrt (genau bis auf beliebig kleinen Approximationsfehler bei "vernünftigen" f_a)

Time expanded networks

Observation. Discrete flows over time in G correspond to static flows in time-expanded networks G^T (for constant τ_a)

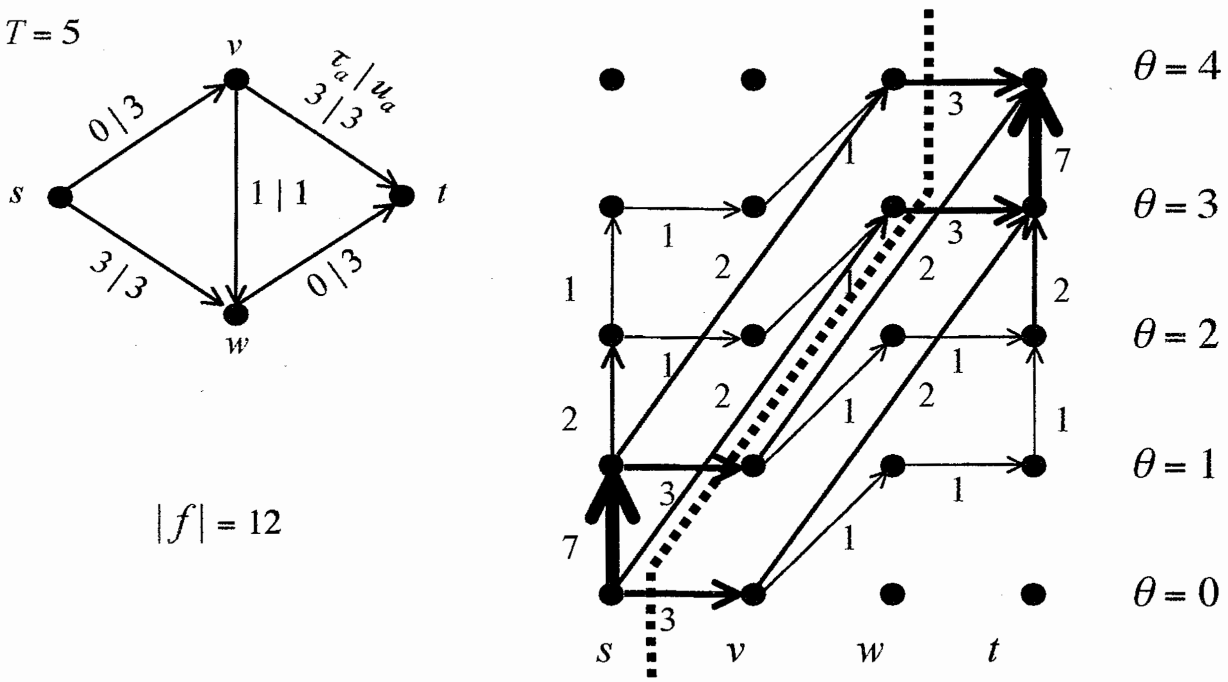


Example: $T = 5$.

Kopie von G für jede Zeitschicht

Kanten zwischen verschiedenen Zeitschichten entsprechend τ_a

A static flow in the time expanded network



$|f| = 12$

min Schnitt = max value dyn. Fluss

Vorteil diskreter dynamischer Flüsse: Beschreibung über zeitexpandierte Netze möglich

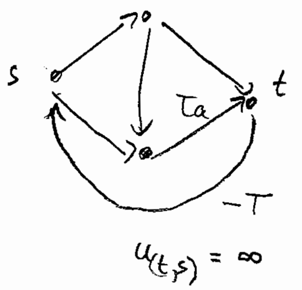
$\Downarrow$

- max s,t-dynamischer Fluss mit Zeithorizont T
  $\hat{=}$ max s,t-statischem Fluss in G^T
- statische Flusstheorie im Prinzip anwendbar (z.B. max Fluss - min Cut)
- ABER G^T riesig bei feiner Zeitskala
  In G^T polynomiale Algorithmen sind bzgl G nur pseudopolynomial

6.3 Algorithmus von Ford-Fulkerson für max dyn.-s,t-Flüsse [1958]

Grobe Idee:

1) Berechne statischen min-cost Fluss x in $G+(t,s) =: \bar{G}$



d.h. Zielfkt $\sum_{a\in A} \tau_a x_a - T \cdot \text{value}(x)$

$\hat{=}$ min-cost Zirkulation, da alle Balancen $b(v) = 0$

[geht in polynomialer Zeit mit Methoden aus ADM I]

2) Wähle beliebige Pfaddekomposition $\mathcal{P} \subseteq \{s,t \text{ Wege}\}$ von x bzgl. G mit x_P = Fluss entlang $P \in \mathcal{P}$

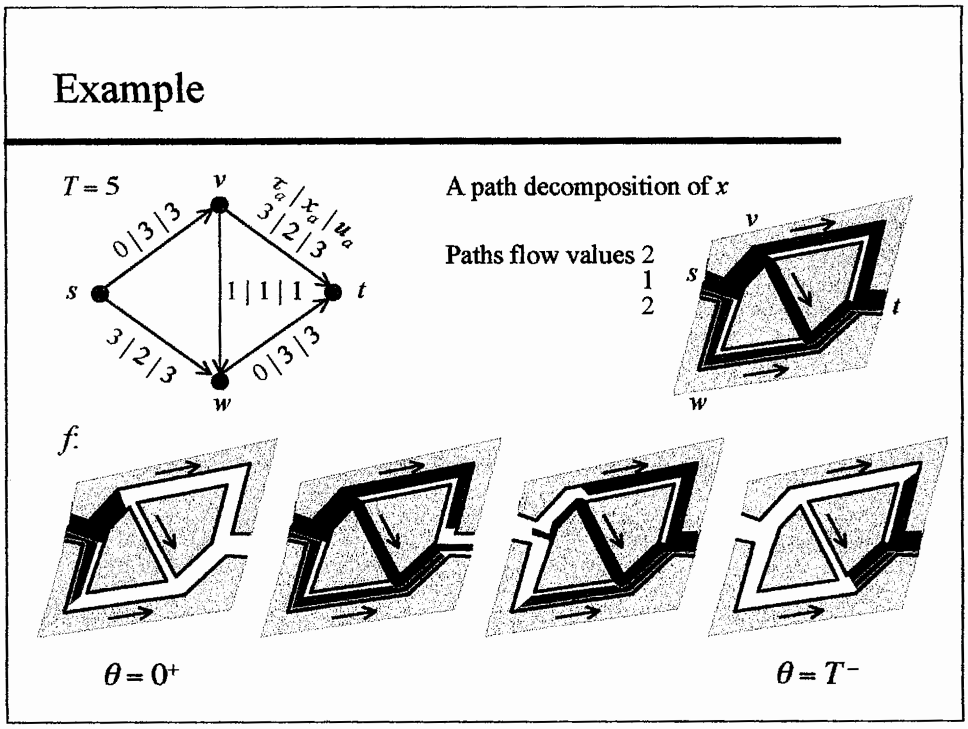
[Standardzerlegung aus ADM I von x in $G+(t,s)$ ergibt gerichtete Kreise, nehme nur die, die (t,s) enthalten, dies definiert s,t Wege ; möglich in polynomialer Zeit, ADM I]

3) Nutze die Pfade zur Konstruktion eines zeitlich wiederholten Flusses f:

f schickt Fluss mit der konstanten Rate x_P entlang P

im gesamten Intervall $[0, T-\tau_P]$

↑ letzter Zeitpunkt zum Senden bei s, so dass Fluss spätestens zur Zeit T in Senke t ankommt



4) Dies ergibt einen dynamischen s,t-Fluss f mit Zeithorizont T

Die Flussraten $f_a : [0, T[\to \mathbb{R}$ ergeben sich polynomiell aus den maximal m Wegraten f_P und Zeiten τ_a

Jede Flussrate ist eine stückweise konstante Fkt mit maximal $2m$ Sprüngen.

$\Rightarrow$ alle Flussraten haben Outputgröße polynomiell in der Inputgröße und können in polyn. Zeit konstruiert (werden)

Zulässigkeit des zeitlich wiederholten Flusses f

- Flusserhaltung trivial., f erfüllt sie mit "=", d.h. keine Speicherung von Fluss in Knoten

- Kapazitätserhaltung:

$$f_a(\theta) \leq \sum_{P: a \in P} x_P = x_a \leq u_a$$

- Nach Zeit T ist das Netzwerk leer, da auf P der letzte Fluss zu Zeit $T - \tau_P$ geschickt wird

Wert des zeitlich wiederholten Flusses f

$$\text{value}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} (T - \tau_P) x_P = T \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_P x_P$$

$$= T \,\text{value}(x) - \sum_{P \in \mathcal{P}} \left(\sum_{a \in P} \tau_a \right) x_P$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \left(\sum_{P \ni a} x_P \right) \tau_a$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a$$

$= $ negative der Zielfunktion $\sum_{a \in A} \tau_a x_a - T \cdot \text{value}(x)$

für min-cost flow, unabh. von Pfadzerlegung!

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$f$ maximiert den Flusswert über alle zeitlich wiederholten dynamischen s,t-Flüsse mit Zeithorizont T}}$

Insbesondere ist $\tau_P \leq T \quad \forall P$, sonst ist $P + (t,s)$ Zykel mit positiven Kosten

Optimalität:

Nutzt max-flow min-cut auch im dynamischen Fall

Def: dynamischer s,t-Schnitt mit Zeithorizont T

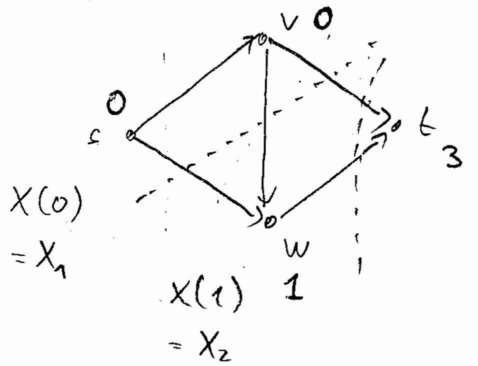
ist gegeben durch Werte $\pi(v) \in [0, \infty[$ für $v \in V$ mit $\pi(s) = 0$, $\pi(t) \geq T$.

Diese Werte definieren eine aufsteigende Folge $\mathcal{C}$ von Mengen

$$X(\theta) := \{ v \in V \mid \pi(v) \leq \theta \}$$

so dass für $\theta \in [0, T[$ $\quad X(\theta), V - X(\theta)$ einen s,t Schnitt definiert

Die Folge hat nur endlich viele verschiedene Mengen $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_k$



$\pi(s) = 0$

$\pi(v) = 0$

$\pi(w) = 1$

$\pi(t) = 3 = T$

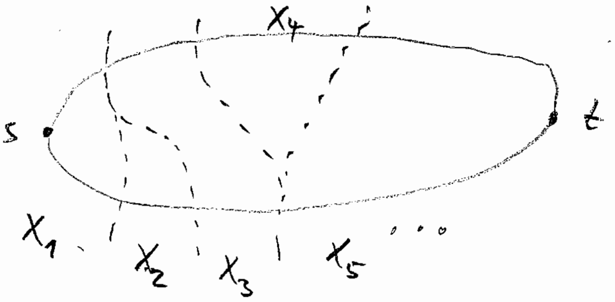
Die Kapazität eines solchen Schnittes $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$\mathrm{cap}(\mathcal{C}) := \sum_{\substack{a \in A \\ a = (v,w)}} \underbrace{\max \{ \underbrace{\pi(w) - \pi(v)}_{\substack{\text{Zeit, die} \\ a \text{ im dyn.} \\ \text{Schnitt ist}}} - \tau_a , 0 \}}_{\substack{\text{maximale Zeitspanne} \\ \text{mit der Fluss aus} \\ \text{Kante } a \text{ rausfließen} \\ \text{konnte, während } a \text{ im Schnitt ist}}} \cdot \underbrace{u_a}_{\substack{\text{Schranke} \\ \text{für die} \\ \text{Flussrate}}}$$

6.1 LEMMA. Für jeden dyn. s,t-Fluss f und jeden dyn. s,t-Schnitt $\mathcal{C}$ zum selben Zeithorizont T gilt

$$\text{value}(f) \leq \text{cap}(\mathcal{C})$$

Beweis: Betrachte die Folge der Schnitte $X_1, X_2, \dots, X_k$ zu $\mathcal{C}$



Jeder Schnitt X_i erzeugt Kantenmenge $\delta^+(X_i)$ (Kanten raus aus X_i)

Das Zeitintervall $[0,T[$ wird durch die "Gültigkeit" der $\delta^+(X_i)$ überdeckt

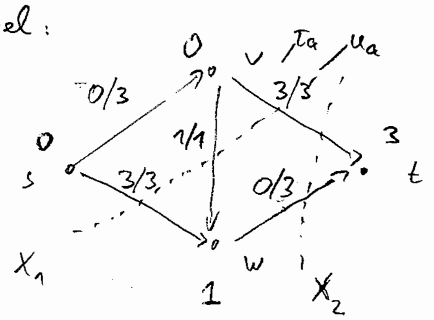
$$0 \underbrace{\vdash\!\!-\!\!-}_{\delta^+(X_1)} [_{\Theta_1} \underbrace{-\!\!-\!\!-}_{\delta^+(X_2)} [_{\Theta_2} \cdots\cdots \dashv T$$

d.h. $\Theta_i = \min\{\pi(w) \mid (v,w) \in \delta^+(X_i)\}$

$\Rightarrow$ value$(f) \leq \sum_i$ Flussmenge über Kanten $\delta^+(X_i)$, die im Zeitintervall $[\Theta_{i-1}, \Theta_i]$ fließen kann

$$\leq \sum_{\substack{a \in A \\ a=(v,w)}} \max\{\pi(w) - \pi(v) - \tau_a, 0\} \cdot u_a = \text{cap}(\mathcal{C}) \quad \square$$

Beispiel:



$$\overset{(s,w),\,(v,w)}{0 \vdash\!\!-\!\!-\!\!-} [_1 \overset{(v,t),\,(w,t)}{-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-} [_{3=T}$$

$\underbrace{\qquad}_{\delta(X_1)}$ maximal 0 "

$\underbrace{\qquad}_{\delta(X_2)}$ maximal 2 Zeiteinheiten à 3 Flusseinheiten über (w,t)

$= 6$

$cap(\mathcal{C})$: $\Big[(s,v) \to \pi(v)-\pi(s)-\tau_a = 0-0-0$ → kein Beitrag$\Big]$ in keinem Schnitt

$(s,w) \to 1-0-3$ → kein Beitrag

$(v,w) \to 1-0-1$ → kein Beitrag

$(v,t) \to 3-0-3$ → kein Beitrag

$(w,t) \to 3-1-0$ → $2 \cdot 3 = 6$

Hier noch ein "formaler" Beweis.

Sei f ein dynamischer Fluss.

Für v und Zeitpunkt Θ definiere $ex_f(v,\Theta)$ als den

Einfluss − Ausfluss in v im Intervall $[0,\Theta]$, also

$$ex_f(v,\Theta) = \sum_{a\in\delta^-(v)} \int_0^{\Theta-\tau_a} f(\xi)\,d\xi - \sum_{a\in\delta^+(v)} \int_0^{\Theta} f(\xi)\,d\xi$$

Dann gilt $value(f) = ex_f(t,T)$

Sei nun $\mathcal{C}$ ein dynamischer Schnitt mit Werten $\pi(v)$

Dann ist

$$value(f) = ex_f(t,T) \leq \sum_v ex_f(v,\pi(v)) \qquad \text{da } \pi(t) \geq T$$

$$= \sum_v \Big(\sum_{a\in\delta^-(v)} \int_0^{\pi(v)-\tau_a} f(\xi)\,d\xi - \sum_{a\in\delta^+(v)} \int_0^{\pi(v)} f(\xi)\,d\xi \Big)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kantenweise}\\ \text{betrachtet}}}{=} \sum_{a=(v,w)} \Big(\int_0^{\pi(w)-\tau_a} f(\xi)\,d\xi - \int_0^{\pi(v)} f(\xi)\,d\xi \Big)$$

$$= \sum_{a=(v,w)} \int_{\pi(v)}^{\pi(w)-\tau_a} f(\xi)\,d\xi$$

$$\leq \sum_{a=(v,w)} \max\{\pi(w) - \pi(v) - \tau_a, 0\} \cdot u_a$$

$$= cap(\mathcal{C}) \qquad \square$$

---

zum Beweis der Optimalität des zeitlich wiederholten Flusses f konstruiert man aus f einen dynamischen s,t Schnitt $\mathcal{C}$ mit $value(f) = cap(\mathcal{C})$

Konstruktion des Schnittes aus Fluss f am Ende des Weges

Setze $\pi(v) :=$ Länge eines kürzesten Weges von s nach v im Residualgraph $(G+(t,s))_x = \bar{G}_x$ bzgl. Kosten τ_a und $-T$

$\boxed{\text{definiert dynamischen } s,t\text{-Schnitt } \mathcal{C}}$ da

$\pi(s) = 0$ ($\bar{G}_x$ enthält keinen negativen Zykel)

$\pi(t) \geq T$ (sonst gibt es in G_x einen s,t Weg mit Länge (= Kosten) $< T$

$\Rightarrow$ $\bar{G}_x$ hat negativen Zykel

Widerspruch, da x Kosten-minimal)

Beachte: Da Kante $(s,t) \in \bar{G}_x$ folgt $\boxed{\pi(t) = T}$

Beweis: $value(f) = cap(\mathcal{C})$

Betrachte Kante $a = (v,w)$

<u>Claim 1</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} &[\pi(v), \pi(w) - \tau_a[\neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad x_a = u_a, \quad f_a(\Theta) = u_a \quad \forall\, \Theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[\end{aligned}}$$

Beweis: a) Annahme $x_a < u_a$

$\Rightarrow (v,w) \in \bar{G}_x \quad \Rightarrow \quad \pi(w) \leq \pi(v) + \tau_a \quad \Rightarrow$ Intervall ist leer
Widerspruch

kürzeste Weglängen

b) Annahme: $\exists\, \Theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$ mit $f_a(\Theta) < u_a \; (= x_a)$

$\Rightarrow \exists$ Weg P_0 in Pfadzerlegung zu x mit $a \in P_0$ und

(i) der erste Fluss entlang P_0 kommt in v nach Zeit $\pi(v)$ an

(wenn auf allen Wegen durch a der Fluss in v bereits zu $\pi(v)$ ankommt, gilt: $f_a(\pi(v)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a$)

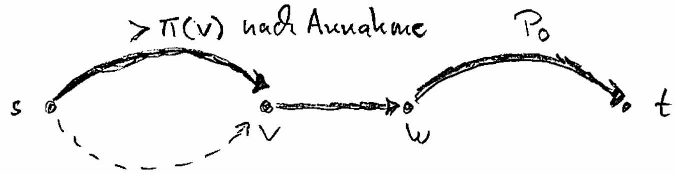
oder

(ii) der letzte Fluss durch P_0 verlässt w vor $\pi(w)$

(sonst $f_a(\pi(w)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a$)

Da f zeitlich wiederholt, muss (i) oder (ii) gelten

zu (i)



P_0 in G

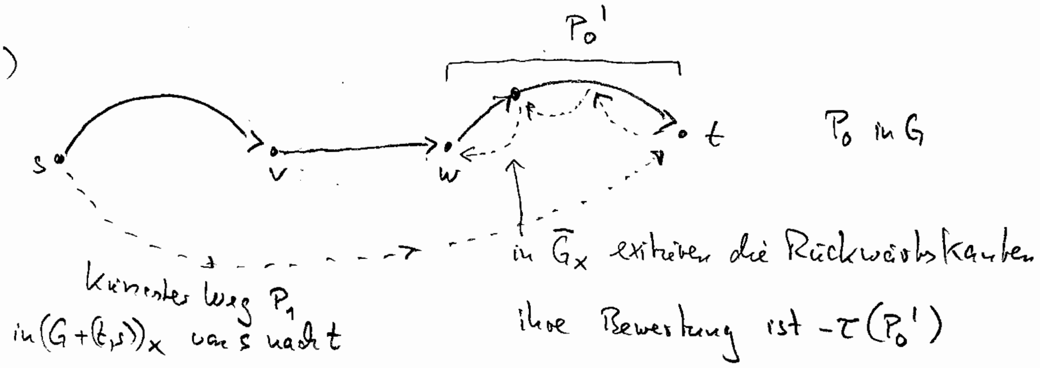
Weg P im Residualgraph $\bar{G}_x$ mit Länge $\pi(v)$, existiert nach Def (von $\pi(v)$)

Entlang P_0 fließt Fluss $\Rightarrow$ Rückwärtskanten sind in $\bar{G}_x$

$\Rightarrow P[s,v] + \overleftarrow{P_0}[v,s]$ ist Zykel negativer Länge in $\bar{G}_x$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Optimalität von x

zu (ii)



Fluss entlang P_0 verlässt w vor $\pi(w)$

$\Rightarrow$ (da man bis zum letzten Moment entlang P_0 schickt)

$$\pi(w) + \tau(P_0') > T = \pi(t) \qquad (*)$$

Betrachte Weg P_1 + Rückwärtskanten zu P_0' von s zu w

Dies ist Weg in G_x mit Länge (Kosten)

$$\pi(t) - \tau(P_0') \overset{(*)}{<} \pi(t) + \pi(w) - \pi(t) = \pi(w)$$

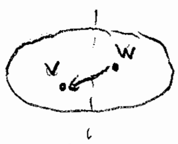
Widerspruch dazu, dass $\pi(w)$ Länge eines kürzesten Weges bis w in $\bar{G}_x$ ist $\square$

Claim 2: $\boxed{[\pi(w) - \tau_a, \pi(v)[\neq \emptyset \Rightarrow x_a = 0,\ f_a(\Theta) = 0 \ \forall \Theta}$

Beweis: Falls $x_a > 0 \Rightarrow$ Kante (w,v) ist in $\bar{G}_x$

$\Rightarrow \pi(v) \leq \pi(w) - \tau_a$ Widerspruch $\square$

Claim 2 $\Rightarrow$ f kreuzt keinen Schnitt auf Rückwärtskanten



$\Rightarrow$ nur auf Vorwärtskanten

$\Rightarrow$ (Claim 1) $f_a(\Theta) = u_a \quad \forall \Theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$

$\Rightarrow$ value(f) = cap$(\mathcal{C})$ $\square$

$\Downarrow$

6.2 SATZ (Ford-Fulkerson 58). (1) Der Algorithmus konstruiert einen optimalen dyn. s,t-Fluss zum Zeithorizont T.

(2) Die Laufzeit wird dominiert durch die Berechnung des statischen min-cost Flusses x

(3) Der optimale dynamische Fluss ist zeitlich wiederholt und kommt ohne Speicherung in Knoten aus

alternativer Beweis für Optimalität über Dualitätstheorie (Schrijver)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min Cost Flow Problem als LP formulieren} & (P) \\ \text{Duales formulieren} & (D) \\ \text{zeigen, dass value}(f) \geq OPT(P) & \\ \phantom{\text{zeigen, dass }}\text{value}(f) \leq OPT(D) & \end{array}\right\} \boxed{\text{AUFGABE 14}}$$

$OPT(P) = OPT(D)$