§5 Verkehrslenkung mit Mautgebühren

5.1 Grundlagen

§ 1,2 zeigen: SO ist UE bzgl. $c_a(x_a) = \underbrace{\tau_a(x_a)}_{\text{Fahrzeit}} + \underbrace{x_a \tau_a'(x_a)}_{\text{"Maut"}}$

bei homogenen Nutzern

$\Downarrow$

Frage: Gibt es feste Mautgebühren μ_a pro Kante a

so dass sich bzgl. $c_a(x_a) := \tau_a(x_a) + \mu_a$

ein SO Fluss f^* als UE bzgl. $c_a(x_a)$ einstellt?

Erweiterte Frage:

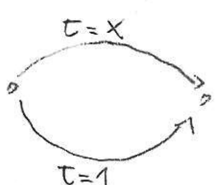
Gibt es zu beliebigem Fluss f feste Mautgebühren

μ_a pro Kante a, so dass sich bzgl. $c_a(x_a) := \tau_a(x_a) + \mu_a$

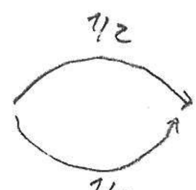
der Fluss f als UE bzgl. $c_a(x_a)$ einstellt?

Ist dies der Fall, so sagen wir, dass $\mu = (\mu_a)_{a \in A}$ den Fluss f *nashifiziert* bzw. dass f (durch Maut) *erzwingbar* ist

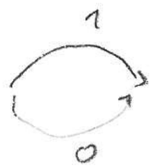
Beispiel: Pigou:



$\Rightarrow$ SO ist

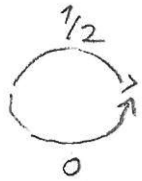


, UE ist



$d = 1$

Maut μ:

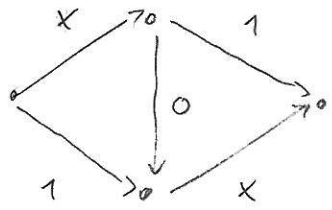


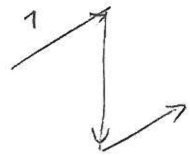
ergibt SO-Fluss

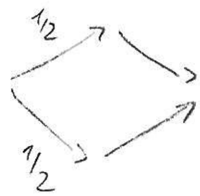
denn: UE bzgl. c_a $\Leftrightarrow$

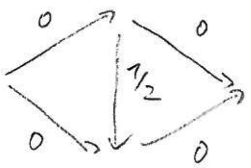
$\Rightarrow x = 1/2$

Bsp: Braess Paradox:

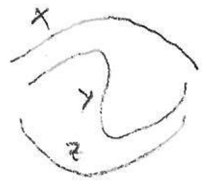
$d = 1$ 

UE 

SO 

Maut 

ergibt SO, denn:



müssen gleiche Fahrzeit erzielen

$$\Rightarrow \underset{①}{x+y+1} = \underset{②}{x+y+\tfrac{1}{2}+y+z} = \underset{③}{1+z+y}$$

① = ③ $\Rightarrow z = x$

$x+y+z = 1 \Rightarrow y = 1-2x \Rightarrow$ ② wird zu $2x + 2(1-2x) + \frac{1}{2}$

$$= \frac{5}{2} - 4x$$

① wird zu $x + 1 - 2x = 1 - x$

① = ② $\Rightarrow 4x - \frac{5}{2} = x - 1 \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$

zeigt, dass SO nashifizierbar, aber neue Straße $\downarrow 0$ wird nicht benutzt.

5.1 LEMMA: Erlaubt man negative Zölle, so ist jeder Fluss f erzwingbar

Beweis: Setze $\mu_a := -\tau_a(x_a(f)) \leq 0$

$\Rightarrow$ alle Fluss führenden Wege bzgl f haben $c_P(f) = 0$.

Zeige: jeder andere s_k, t_k - Weg Q hat Kosten $c_Q(f) \geq 0$

$$c_Q(f) = \sum_{a \in Q} \left(\tau_a(x_a(f)) + \mu_a\right) = \sum_{a \in Q} \left(\tau_a(x_a(f)) - \tau_a(x_a(f_a))\right)$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ f ist UE bzgl der (negativen) Mautgebühren

und alle Wege haben die Länge 0 □

Lemma zeigt, dass negative Mautgebühren nicht sinnvoll sind

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Beschränkung auf } \mu_a \geq 0}$ im Weiteren

5.2 LEMMA (Beckmann, McGuire, Winsten 56).
Das SO (jedes SO) ist erzwingbar mit Maut $\mu \geq 0$

Beweis: Sei f^* ein SO. Setze $\mu_a := \underbrace{f_a^*}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\tau_a'(f_a^*)}_{\geq 0}$

da $\tau_a \nearrow$

Betrachte UE f bzgl. $c_a(x_a) = \tau_a(x_a) + \mu_a$

$\Leftrightarrow$ Für alle $k \in C$, alle $P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$ gilt

$$\sum_{a \in P} c_a(f_a) \leq \sum_{a \in Q} c_a(f_a)$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{a \in P} \underbrace{\left(\tau_a(f_a) + f_a \cdot \tau_a'(f_a)\right)}_{\text{marginale Kosten}} \leq \sum_{a \in Q} \underbrace{\left(\tau_a(f_a) + f_a \cdot \tau_a'(f_a)\right)}$$

$\Rightarrow$ f ist SO und $f_a = f_a^*$ falls τ_a streng monoton □

5.2 Durch Maut erzwingbare Auslastungen

Betrachte jetzt allgemeinere Frage, wann ein Fluss f (oder genauer: eine Auslastung g der Kanten) erzwingbar ist.

Betrachten dazu <u>heterogene Nutzer</u> gegeben durch Fahrzeitsensitivitäten $\alpha_i \geq 0$ bzgl. Commodity i
[o.B.d.A. mit Commodity verträglich, $\mathcal{P}_i$ sei weiter Pfadmenge bzgl. i, erlauben jetzt $(s_i, t_i) = (s_j, t_j)$ und $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_j$, schreibe f_P^i für Pfadfluss auf $P \in \mathcal{P}_i$]
o.B.d.A. $\sum_i d_i = 1$ (Skalierung Gesamtdemand)

Nutzung Kante a von Commodity i (Nutzer Typ i) verursacht Kosten

$$\underbrace{\alpha_i \cdot \tau_a(f_a)}_{\text{Zeit}} + \underbrace{\mu_a}_{\text{Maut}} \quad \text{ausgedrückt in €}$$

Eine <u>Auslastung</u> ist eine Kantenbewertung $g = (g_a)_{a \in A}$
Jeder Fluss f induziert die Auslastung $f_a = \sum_i \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_i \\ P \ni a}} f_P^i$.

Auslastung g heißt <u>zulässig</u>, wenn ein zulässiger Fluss f existiert, so dass für die induzierte Auslastung f_a gilt:

$$f_a \leq g_a \quad \forall a$$

g heißt <u>erzwingbar</u>, wenn es einen Mautvektor μ gibt so dass das induzierte UE f bzgl. der Kosten $\alpha_i \tau_a(f_a) + \mu_a$ die Auslastung g induziert, also $f_a = g_a \;\; \forall a$

Eine Auslastung g heißt <u>optimal</u>, wenn g $\sum_a \tau_a(g_a) g_a$ über alle zulässigen Auslastungen minimiert

5.3 SATZ [Fleischer et al 2004]: Unter den obigen Annahmen existiert Maut, die eine optimale Auslastung g^* erzwingt.

Beweis durch Dualitätstheorie der linearen Optimierung

(1) $\boxed{\text{LP zur Ermittlung eines kostenmin. Flusses } f \text{ bzgl. Auslastung } g}$

$$(P_g) \quad \min \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(g) f_P^i \qquad \leftarrow \text{Kosten } f \text{ bzgl. } g$$

$$\text{unter} \sum_i \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_i \\ P \ni a}} f_a^i \le g_a \quad \forall a \qquad \leftarrow g \text{ ist zulässig}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P^i = d_i \\ f_P^i \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \leftarrow f \text{ ist zulässiger Fluss}$$

Beachte: g wird als fest angenommen, gesucht ist Fluss f, der zu Fahrzeiten $\alpha_i \cdot \tau(g_a^i)$ die gesamten fahrzeitabhängigen Kosten von f minimiert (Maut nicht eingeschlossen)

(2) $\boxed{\text{Übergang zum dualen LP mit Dualvariablen}}$

z_i für die Gleichheitsbedingungen, $i \in I$

μ_a für die $\geq$ Bedingungen, $a \in A$, nach Mult. mit -1

(D_g) $\max \sum_i d_i z_i - \sum_a g_a \mu_a$

aus Multiplikation des $\leq$-Bed mit -1

$$z_i - \sum_{a \in P} \mu_a \leq \alpha_i \tau_p(g) \quad \forall i, \forall P \in \mathcal{P}_i \qquad (*)$$

$$\mu_a \geq 0$$

$$(*) \iff z_i \leq \underbrace{\sum_{a \in P} (\alpha_i \tau_p(g) + \mu_a)}_{\text{Kosten von } P \text{ bei Interpretation von } \mu \text{ als Maut}}$$

$\Rightarrow$ $z_i \leq$ Kosten kürzester Weg bzgl. Kosten

$\Rightarrow$ im Zielfkt ist erster Term $\leq$ Gesamtkosten

zweiter Term ist Summe der Mautkosten bzgl. g

$\Rightarrow$ (da maximiert wird)

z_i werden groß gemacht $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ entsprechen Länge kürzeste Weg bzgl. Kosten

Beachte: im primalen keine Maut

Maut μ_a ergibt sich als Dualvariable

5.4 PROPOSITION: Sind f und (μ, z) optimale Lösungen von (P_g) und (D_g), so ist f ein UE bzgl. der Maut μ

Beweis: Nutze Bed. vom Komplementären Schlupf:

$$f_P^i > 0 \Rightarrow z_i = \sum_{a \in P} (\mu_a + \alpha_i \tau_a(g))$$

$$= \text{Kosten des Weges } P$$

Für nicht genutzte Wege $(f_P^i = 0)$ gilt $(*)$

$$\Rightarrow \text{Kosten } P \geq z_i$$

$\Rightarrow f$ ist UE bzgl der Maut μ $\square$

5.5 PROPOSITION. Ist g eine zulässige Auslastung, so haben (P_g) und (D_g) optimale Lösungen

Beweis: g zulässig $\Rightarrow \exists$ Fluss f mit Auslastung $f_a \leq g_a \ \forall a$

$\Rightarrow f$ ist zulässig für (P_g)

Claim: dann ist $\mu_a := 0 \ \forall a$ und $z_i := 0 \ \forall i$ eine zulässige Lösung für (D_g)

Überprüfe $(*)$: $$\underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{\tau_P(g)}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{a \in P} \mu_a}_{= 0} \geq 0 = z_i$$

$\Rightarrow (P_g)$ und (D_g) haben zulässige und damit auch optimale Lösungen $\square$

Die Propositionen zeigen:

g ist zulässige Auslastung $\Rightarrow$ (P_g), (D_g) haben Optimallösungen f, (μ, z) f ist UE bzgl. μ

Brauchen zwei weitere Begriffe:

- Auslastung g heißt <u>minimal</u>
  $:\Longleftrightarrow$ (P_g) hat optimale Lösung, bei der alle Ungleichungen mit Gleichheit gelten (d.h. $f_a = g_a \; \forall a$)

- Auslastung g heißt <u>minimal zulässig</u>
  $:\Longleftrightarrow$ kann auf keiner Kante verringert werden ohne Zulässigkeit zu verletzen
  d.h. $g' \le g$ und $g'_a < g_a$ für ein a $\Rightarrow$ g' nicht zulässig

5.6 SATZ: Eine zulässige Auslastung g ist erzwingbar $\Longleftrightarrow$ g ist minimal

Beweis: "$\Leftarrow$"

g sei minimal $\Rightarrow$ die zugehörige optimale Lösung f von (P_g) induziert g
und f ist UE bzgl. dual opt Lösung
$\Rightarrow$ g wird von UE bzgl μ induziert $\Rightarrow$ erzwingbar

"$\Rightarrow$"

g sei erzwingbar $\Rightarrow$ $\exists$ Maut μ mit $f_a = g_a \quad \forall a$

$$= \sum_i \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_i \\ P \ni a}} f_a^i \quad \text{und } f \text{ ist UE bzgl } \mu$$

$\Rightarrow$ Ungleichung in (P_g) ist scharf $\forall a$

f ist UE $\Rightarrow$ alle Fluss führenden Wege für i haben

dieselben Kosten $\underbrace{\alpha_i \tau_P(g) + \mu_P}_{=: z_i}$

und (μ, z) ist zulässig für (D_g)

Claim: f und (μ, z) erfüllen Bed. vom komplementären Schlupf

denn: $f_P > 0 \quad P \in \mathcal{P}_i \overset{\text{Def } z_i}{\Rightarrow}$ $(*)$ gilt mit Gleichheit

umgekehrt: $(*)$ gilt mit $<$ $\overset{\text{Def } z_i}{\Rightarrow} f_P^i = 0$

$\Rightarrow$ f und (μ, z) sind Optimallösungen

$\Rightarrow$ $(f_a = g_a)$ g ist minimal $\square$

| Beweis von Satz 5.3 : Das SO ist erzwingbar |

g sei optimale Auslastung.

Zeige: g ist minimal $\overset{\text{Satz 5.6.}}{\Rightarrow}$ g ist erzwingbar

Ann. g nicht minimal

Betrachte Nummerierung der Kanten $a_1, a_2, \dots, a_m$

Sei $g^{(0)} := g$

Für a_i definiere $g^{(i)}$ durch $g_a^{(i)} := \begin{cases} g_a^{(i-1)} & \forall\, a \neq a_i \\ \bullet & a = a_i \end{cases}$

minimaler Wert, so dass $g^{(i)}$ noch zulässig ist

Dies ergibt Folge von zulässigen Auslastungen

$$g = g^{(0)} \to g^{(1)} \to g^{(2)} \to \dots \to g^{(m)} =: g^*$$

$\Rightarrow g^*$ ist minimal zulässig nach Konstruktion

$\Rightarrow$ (P_{g^*}) hat optimale Lösung $f^* \leq g^*$

g^* minimal zulässig $\Rightarrow f^* = g^*$

$\Rightarrow g^*$ minimal $\overset{5.6}{\Rightarrow}$ g^* erzwingbar

$g^* \leq g$, g optimal $\Rightarrow g^*$ optimal $\square$

5.3 Charakterisierung erzwingbarer Auslastungen

5.7 KOROLLAR [Fleischer et al 2004]

Sei $w: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine monoton nicht fallende Fkt.

$\Rightarrow$ $\exists$ Maut, die eine Auslastung g^* erzwingt, die $w(g)$ minimiert [$w(g)$ allgemeiner als $\sum_i \alpha_i \sum_a \tau_a(g_a^i) \cdot g_a^i$]

Beweis: Anpassung des Beweises von Satz 5.3

Die Optimalität von g wird nur am Ende genutzt und jetzt zu $g^* \leq g \Rightarrow w(g^*) \leq w(g) \overset{g \text{ opt.}}{\Rightarrow} g^*$ optimal.

Alle anderen Überlegungen (auch die LPs) bleiben gleich $\square$

5.8 BEISPIEL: $w(g) := \max_i \min_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(g) \to \min$

minimiert die maximale Fahrzeit bzgl. g über alle i

$\Rightarrow$ schnelle Wege für jede Commodity [Feuerwehr!]

So ist ja unfair für einzelne Nutzer. Daher Wege verschieden gewichten bzgl. der Fahrzeitsensitivitäten der Nutzer i $\Rightarrow \min \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f) f_P^i$

Ein Fluss heißt <u>gewichtet optimal</u>, wenn er diese Fkt. minimiert.

$\hat{=}$ Minimierung der Gesamt Fahrzeit in € $\hat{=}$ Zielfkt von (P_g)

5.8 KOROLLAR [Fleischer et al 2004]

Ein gewichtet optimaler Fluss ist erzwingbar

Beweis: Sei f^* ein gewichtet optimaler Fluss mit $\sum_a f_a^*$ minimal

Zeige: von f^* induzierte Auslastung ist minimal

$\overset{\text{Satz 5.6}}{\Rightarrow}$ f^* ist erzwingbar

Ann. f^* nicht minimal

$\Rightarrow$ das LP (P_{f^*}) hat eine optimale Lösung $f \leq f^*$

und $\exists$ Kante $\bar{a}$ mit $f_{\bar{a}} < f_{\bar{a}}^*$

$\Rightarrow \sum_a f_a < \sum_a f_a^*$

Außerdem

$$(*)\quad \begin{cases} \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f) f_P^i \overset{\tau_a \text{ monoton}}{\leq} \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f^*) f_P^i \\ \overset{f \text{ optimal in } (P_{f^*})}{\leq} \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f^*) f_P^{*i} \end{cases}$$

f^* gewichtet optimal $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ f gewichtet optimal

$\Rightarrow$ $(\sum_a f_a < \sum_a f_a^*)$ Widerspruch zu Wahl von f^* $\square$

Beweis von Satz 5.3 (S_0 ist erzwingbar) zeigte Technik zur Reduzierung der Kantenauslastungen.

Jetzt: diese Technik allgemeiner nutzen.

Die Kante μ erzwingt Auslastung g schwach

:$\iff$ $\exists$ Auslastung $g' \leq g$, die von μ erzwungen wird

5.9 KOROLLAR [Fleischer et al 2004]

Jede zulässige Auslastung ist schwach erzwingbar

Beweis: g sei zulässige Auslastung.

Betrachte wie im Beweis zu Satz 5.3

- Nummerierung der Kanten $a_1 \ldots a_m$
- $g^{(0)} := g$

  zu a_i $\quad g^{(i)}$ mit $g^{(i)} := \begin{cases} g_a^{(i-1)} & \forall a \neq a_i \\ \cdot \end{cases}$

  minimaler Wert, so dass $g^{(i)}$ noch zulässig ist

Sei g' die resultierende minimal zulässige Auslastung

$\Rightarrow$ g' ist minimal $\overset{\text{Satz 5.6}}{\Longrightarrow}$ g' ist erzwingbar

$g' \leq g$

wie im Beweis Satz 5.3

$\Big\}$ g schwach erzwingbar $\square$

Anwendung Korollar 5.9:
Berechnung Tarif um eine festgelegte maximale Kantenbelastung nicht zu überschreiten
[will keinen speziellen Fluss erzwingen!]

$\boxed{\text{Aufgabe 9}}$: Eine Maut zur Erzwingung einer Auslastung kann in polynomieller Zeit berechnet werden

Hinweis: LP "klein" machen durch kantenbasierte Form

$\boxed{\text{Aufgabe 10}}$: Charakterisieren Sie das Polyeder aller Mautvektoren zur Erzwingung einer festen Auslastung

Hinweis: Nutze (P_g) und (D_g) in Kantenform

5.4 Das Minimum Toll Booth Problem (MTB)

Bisherige Maut zur Erzwingung des SO (marginal cost pricing) kann Maut auf jede Kante festlegen

$\Rightarrow$ nicht sinnvoll in Praxis

Daher: min # Kanten mit Maut zur Erzwingung des SO

$$(\text{MTB}) \qquad \min \sum w_a z_a =: w(\mu)$$

w_a: Gewicht ≥ 0 $\qquad$ z_a: 0,1 Variable mit $z_a = \begin{cases} 1 & \mu_a > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Menge $M(SO)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{so dass } \mu \text{ existiert auf Kanten mit } z_a = 1 \\ \text{und } \mu \text{ erzwingt ein SO} \end{array} \right.$

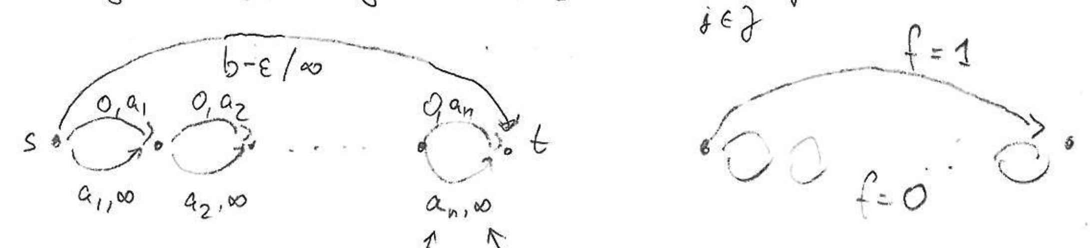
5.10 SATZ Das MTB Problem zur Erzwingung eines vorgegebenen Flusses f ist (schwach) NP-schwer [f i.A. $\neq$ SO]

Beweis: Reduktion von PARTITION:

Gegeben $a_1 \dots a_n$ mit $\sum a_i = 2b$

Frage: $\exists ?\ J \subseteq \{1,\dots,n\}$ mit $\sum_{j \in J} a_j = b$

Graph:



Fahrzeit Gewichte, $\varepsilon < \min_i a_i$

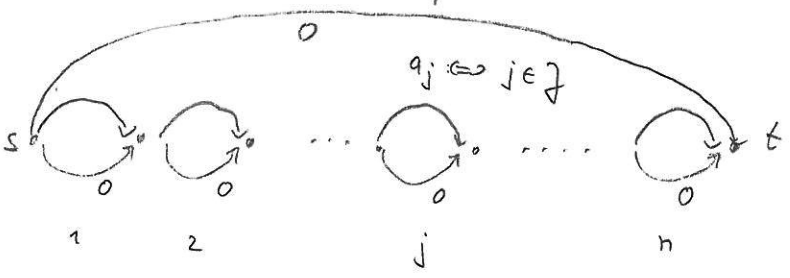
Zeige: I JA-Instanz von PARTITION $\Leftrightarrow$ $\exists\ \mu \in M(f)$ mit $w(\mu) \leq b$

μ erzwingt f

"⇒"
Sei I eine JA-Instanz von PARTITION mit Indexmenge J,

also $\sum_{j \in J} a_j = b$.

Definiere dazu den Mautvektor μ als

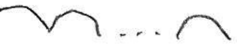


d.h. $\mu(\text{obere Kante in Parallelenpaar } j) := \begin{cases} a_j & j \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und $\mu \equiv 0$ sonst

$$\Rightarrow \quad w(\mu) = \sum_{j \in J} w_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konstruktion}}}{=} \sum_{j \in J} a_j = b$$

μ erzwingt f, denn  hat Länge $b - \varepsilon$

 hat Länge b

Ersetzen von oberen Kanten durch die unteren Kanten verlängert höchstens den Weg

$\Rightarrow$ μ erzwingt f und hat Gewicht $w(\mu) \leq b$

"⇐" Sei $\mu \in M(f)$ mit $w(\mu) \leq b$

Konstruktion $\Rightarrow$ $\mu_a > 0$ kann nur auf oberen Kanten

in  sein

(andere Kanten haben Gewicht ∞)

Beh: $w(\mu) = b$

denn: Ann. $w(\mu) < b$

$$\underbrace{w(\mu)}_{\displaystyle \sum_{a:\, \mu_a > 0} w_a} = \sum_{j \in J} a_j$$

Konstruktion

und J = zugehörige Indexmenge der Parallelenpaare in denen $\mu_a > 0$

$\Rightarrow$ Weg $\frown\frown \ldots \frown$ hat Länge $\sum_{j \in J} a_j < b$

$\Rightarrow$ $\mu \notin M(f)$

Also: $w(\mu) = b$ und $\sum_{j \in J} a_j = b$

$\Rightarrow$ I ist JA-Instanz von Partition $\square$

Problem MTB hat starke Verwandschaft mit

MIN LENGTH BOUNDED CUT

Gegeben: Digraph $D = (V, A)$
Kantenlängen l_a, Längenschranke L
Kapazitäten u_a
Knoten s, t

Gesucht Schnitt $C \subseteq A$ (als Kantenmenge)

so daß
$(V, A - C)$ keine s,t-Wege der Länge $\leq L$ enthält,
C minimale Kapazität $u(C) := \sum_{a \in C} u_a$ hat

length bounded cut

5.11 SATZ [Baier et al 06] Für $\varepsilon > 0$ und $L \in \{4, \ldots, \lfloor n^{1-\varepsilon} \rfloor\}$ ist es NP-schwer das MIN L-BOUNDED CUT Problem mit $l_a \equiv 1$, $u_a \equiv 1$ besser als 1.1377 zu approximieren

(ohne Beweis $\square$

5.12 SATZ: MIN-L-BOUNDED CUT und single arc MTB sind polynomial äquivalent und gleichen Zielfunktionswert

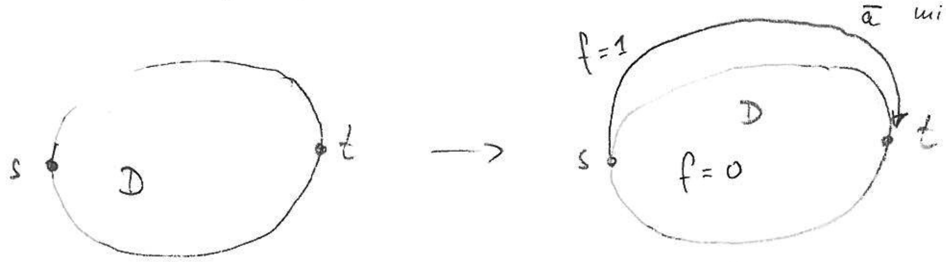
Fluss nur auf eine Kante

Beweis: Transformation MIN L-BOUNDED CUT → MTB:

Sei I Instanz von MIN-L-BOUNDED CUT

$\bar{a}$ mit $\tau_{\bar{a}} := L+\varepsilon$

$w_{\bar{a}} := 1$



u, l, L gzz

$\tau := l \quad w := u$

ε so klein dass alle $L+\varepsilon$ längenbeschränkten Wege in D bereits L-längenbeschränkt sind

Sei C ein L-bounded Schnitt für I

$\Rightarrow \mu_a := \begin{cases} M \text{ groß} & \text{falls } a \in C \\ 0 & \text{falls } a \notin C \end{cases}$ ist Kantvektor mit $w(\mu) = u(C)$

und μ erzwingt f

Für jeden zulässigen Kantvektor μ für f gilt

$\{a \in A \mid \mu_a > 0\}$ ist ein L-bounded Schnitt

$\Rightarrow w(\mu) \geq u(C)$

Umgekehrte Transformation $\boxed{\text{AUFGABE 11}}$

5.5 Beste Maut auf beschränkter Anzahl von Kanten

realistischer für Anwendungen (London, Stockholm, Singapur)

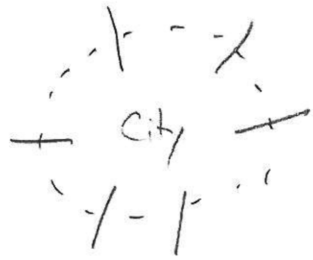
i. A. NP-schwer

lösbar für Netze der Form

[Harks et al 2012]

m parallele Kanten

Approximation von - Brücken über einen Fluss
- Zugang zu Innenstadt



Exakt für mehrspurige Autobahnen (Israel)

Beste Maut $\hat{=}$ induzierbarer UE Fluss f

minimiert $\sum_a \tau_a(f_a) \cdot f_a$

Aufgabe 12 Sei N = Menge der Kanten ohne Maut

M = -"- mit Maut μ_a

G 

d = Gesamtdemand

Zeige, dass der Optimalwert $\sum_a \tau_a(f_a) f_a$ nur von der Aufteilung d_N, d_M des Demands auf die Mengen N und M abhängt, d.h. OPT $= \max_{d_N} F(d_N)$

Aufgabe 13 Entwerfen Sie für allgemeine Graphen und mehrere (s_i, t_i) einen heuristischen Algorithmus zur "Minimierung" von $\sum_a \tau_a(f_a) \cdot f_a$ unter Maut auf beschränkter (aber beliebiger) Menge von Kanten.

Hinweis: orientieren Sie sich am Abstiegsverfahren