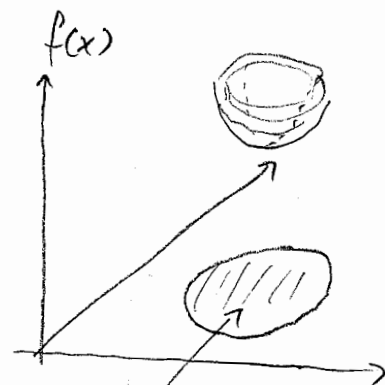


§2 Optimalitätsbedingungen für nichtlineare konvexe und differenzierbare Optimierungsprobleme

Betrachte

$$(NLP) \begin{cases} \min f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{unter } g_i(x) \leq 0 & i \in I \\ f, g_i \text{ konvex und diffbar} \end{cases}$$



Standardvoraussetzung:

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } g_i(x) < 0 \quad \forall i \\ \text{oder } g_i \text{ linear} \quad \forall i \end{aligned}$$

Existenz innerer Punkt

Betrachte Lagrange fkt

$$L(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \quad \lambda_i \geq 0$$

2.1 SATZ: Unter diesen Voraussetzungen gilt:

\bar{x} ist globales Optimum von (NLP)

\Leftrightarrow die Karu-Tucker Bedingungen gelten in \bar{x} [1951]

$$\text{d.h. } \exists \bar{\lambda} \geq 0 \text{ mit } \nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$$

$$\bar{\lambda}_i \cdot g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i$$

Bei uns: lineare Gleichungen $\sum_{p \in P_k} x_p = d_k \quad \forall k$

Verzweigerbedingungen $x_p \geq 0$

allgemeine min $f(x)$ f konvex
solche Form

$$\text{unter } h_i(x) = - \sum_j h_{ij} x_j + b_i = 0 \quad i \in I$$

$$g_j(x) = -x_j \leq 0 \quad j \in J$$

↓

Kuhn-Tucker Bedingungen ergeben: x^* optimal \Leftrightarrow

∃ Zahlen $\lambda_j \geq 0$ und μ_i beliebig mit

$$\nabla f(x^*) + \sum_j \lambda_j \nabla_x g_j(x^*) + \sum_i \mu_i \nabla_x h_i(x^*) = 0 \quad (1)$$

$$\lambda_j \cdot g_j(x^*) = 0 \quad \forall_j \quad (2)$$

Spezialisierung auf Verkehrsproblem

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \lambda_j + \sum_i \mu_i (-h_{ij}) = 0 \quad \forall_j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \lambda_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij}$$

Setze λ_j in (2) ein

$$(2) \quad \lambda_j \cdot g_j(x^*) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij} \right) (-x_j) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij} \right) x_j = 0 \quad (2.1)$$

$$\lambda_j \geq 0 \text{ ergibt } \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_i \mu_i h_{ij} \geq 0 \quad (2.2)$$

Nebenbedingungen ergeben $\sum_i h_{ij} x_j^* = b_i$ (2.3)

$$x_j^* \geq 0 \quad (2.4)$$

Also:

Notwendige (und hinreichende) Bedingungen für Optimalität von x^* ist die Existenz von Zahlen μ_i ($i \in I$) mit (2.1) - (2.4)

Anwenden auf SO:

f = Wegfluss $x(f)$ zugehöriges Knotenfluss

$$\text{mit } G(x(f)) = \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a(x_a)$$

$$x_a = \sum_{p \ni a} x_p \quad \forall a$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_k} x_p = d_k \quad \forall k$$

$$f_p \geq 0$$

Kuhn-Tucker Bedingungen:

$$f_P \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial f_P}(x(f)) - \mu_k \cdot 1 \right) = 0 \quad \forall k \in C, P \in \mathcal{P}_k \quad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial f_P}(x(f)) - \mu_k \geq 0 \quad \forall k \in C, P \in \mathcal{P}_k \quad (2)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P = d_k \quad \forall k \quad (3)$$

$$f_P \geq 0 \quad \forall k, P \in \mathcal{P}_k \quad (4)$$

Betrachte zunächst $\frac{\partial C}{\partial f_P}(x(f))$

$$= \frac{\partial}{\partial f_P} \sum_{a \in A} \underbrace{x_a(f) \cdot \tau_a(x_a(f))}_{=: c_a(x_a(f))}$$

$$= \sum_{a \in A} \frac{\partial c_a(x_a)}{\partial x_a} \frac{\partial x_a(f)}{\partial f_P} \quad \text{Kettenregel}$$

$$= \sum_{a \in A} \frac{\partial c_a(x_a)}{\partial x_a} \cdot \delta_{a,P}$$

$$\text{mit } \delta_{a,P} = \begin{cases} 1 & a \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{da } x_a = \sum_{P' \ni a} f_{P'}$$

$$= \sum_{P \ni a} \frac{\partial C_a}{\partial x_a}(x_a) = \sum_{P \ni a} \left(x_a \cdot \frac{d}{dx_a} \tau_a(x_a) + \tau_a(x_a) \right)$$

$$= c'_a(x_a) \text{ aus § 1}$$

"modifizierte Tarifziffkt",

"marginale Kosten"

$$\Rightarrow (1) \text{ wird zu } f_P \cdot \left(\sum_{a \in P} c'_a(x_a) - \mu_k \right) = 0 \quad \forall k, P \in \mathcal{P}_k$$

$$(2) \text{ wird zu } \sum_{a \in P} c'_a(x_a) \geq \mu_k \quad \forall k, P \in \mathcal{P}_k$$

(1), (2) bedeuten

(1): Fluss führende Wege ^{zu k} haben dieselbe Länge μ_k bzgl.

$c'(x_a)$

(2) jedes Weg ^{zu k} hat mindestens die Länge μ_k bzgl. $c'(x_a)$
als Tarifziffkt

$$\Rightarrow SO = UE \text{ bzgl. } c'_a(x_a)$$