$w(C_i) \leq w(D_j) \Rightarrow B'$ ist minimale Basis

Claim $\Rightarrow B'$ erweitert $C_1, \dots, C_i$ zu minimale Basis

$\Rightarrow$ Widerspruch □

Aufwand des Algorithmus:

Kritisch sind Schritte 4: Gleichungssystem lösen

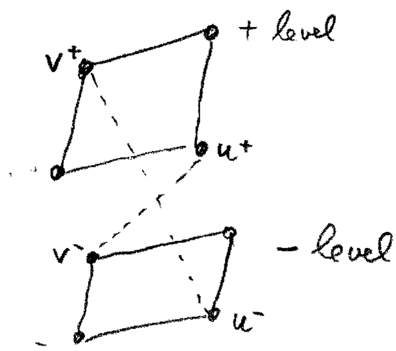
5: kürzesten Kreis mit Nebenbed. berechnen

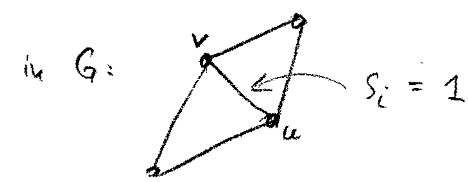
zu 5: über kürzeste-Wege Berechnung im Hilfsgraphen G_i in Iteration i

$G_i = (V_i, E_i)$ und $V_i := \{v^+, v^- \mid v \in V\}$

$E_i := \{ (u^+,v^+), (u^-,v^-) \mid e = (u,v) \in E,\ (S_i)_{(u,v)} = 0 \} \cup$

$\{ (u^+,v^-), (u^-,v^+) \mid (S_i)_{(u,v)} = 1 \}$





Kanten bekommen das Gewicht der sie erzeugenden Kante (u,v)

Jeder (elementare) v^+, v^- - Weg in G_i entspricht in G einem Kreis C (nach Kürzung 2x durchlaufener Kanten), der eine ungerade Anzahl von S_i-Kanten benutzt. Ein kürzester solcher Weg entspricht einem kürzesten Kreis C mit $\varphi(C)^T \cdot S \neq 0$

$\Rightarrow$ Schritt 5 kann durch kürzeste Wege Suche mit Dijkstra von jedem Knoten v^+ aus in G_i behandelt werden

$\Rightarrow$ $O(n \cdot SP(n,m))$ für Iteration i

$\Rightarrow$ $O(mn\, SP(n,m))$ insgesamt.

zu 4: Gleichungssystem hat maximal v Gleichungen und m Variablen $\Rightarrow$ $O(m^3)$ per Gauss-Elimination

$\Rightarrow$ $O(m^4)$ insgesamt

Verbesserung möglich

12.5 SATZ (Kavitha et al 04): Algorithmus 12.3 kann in $O(m \cdot n \cdot SP(n,m))$ implementiert werden

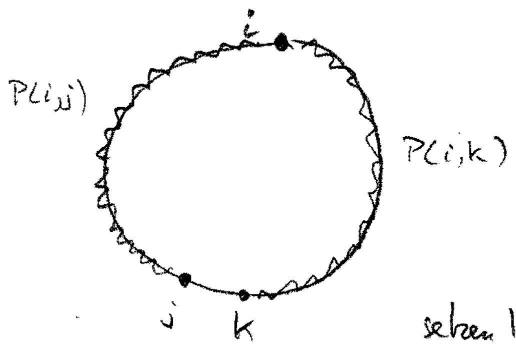
ohne Beweis

Bemerkung: Algorithmus 12.3 folgt dem Greedy-Prinzip: wähle in jeder Iteration einen kürzesten Kreis, der Kanten im orthogonalen Komplement der bisherigen Kreise enthält, für die Orthogonalität ist der Vektor S_i der "Zeuge"

Anderer Ansatz (eher graphentheoretisch motiviert) beruht auf folgendem Lemma

12.6 LEMMA: a) Knoten i ist auf einem Kreis C aus einer minimalen Kreisbasis $\Rightarrow$

C enthält eine Kante (j,k), so dass die Wege $P(i,j)$ und $P(i,k)$ entlang von C kürzeste Wege in G von i nach j bzw. i nach k sind



b) Sind alle $w(e) > 0$, so enthält die Menge aller Kreise, die man aus (beliebigen) kürzesten Wegen $P(i,j)$, $P(i,k)$ und Kante (j,k) zusammen setzen kann, eine minimale Kreisbasis

ohne Beweis □

12.7 ALGORITHMUS (Horton 87)

1. Berechne kürzesten Weg $P(j,k)$ zwischen je 2 Knoten j,k
2. Für jeden Knoten i und jede Kante (j,k), konstruiere den Kreis
   $C(i,j,k) = P(i,j) + P(i,k) + (j,k)$ und berechne seine Länge
   (lasse dabei nicht-elementare Kreise weg)
3. Sortiere diese Kreise aufsteigend nach ihrer Länge, etwa $C_1, C_2, \ldots$
4. Konstruiere eine Basis mit dem <u>Greedyalgorithmus</u>
   - 4.1. $B := \{C_1\}$
   - 4.2. solange $|B| < \nu$
     wähle in der Reihenfolge $C_2, C_3, \ldots$
     den kürzesten Kreis C, der linear unabhängig zu allen
     Kreisen aus B ist, setze $B := B \cup \{C\}$

12.8 SATZ (Horton 87) Der Algorithmus konstruiert eine minimale Kreisbasis

Beweis: (1) Er konstruiert eine Basis

lin. unabh. klar

zu jeder Kante e $\exists$ Kreis unter den C_j mit $e \in C_j$

$\Rightarrow$ Basis

(2) minimale Basis

ergibt sich aus Greedy-Algorithmus und der linearen Unabhängigkeit

allgemein:

$(E, \mathcal{J})$ mit $\mathcal{J} \subseteq 2^E$ heißt Matroid

$:\Leftrightarrow$ $\emptyset \in \mathcal{J}$

$A \subseteq B \in \mathcal{J} \Rightarrow A \in \mathcal{J}$

$A, B \in \mathcal{J}, |A| < |B| \Rightarrow \exists e \in B$ mit $A \cup \{e\} \in \mathcal{J}$

Beispiele: a) {kreisfreie Kantenmengen eines unger. Graphen} = $\mathcal{J}$

b) {Mengen von linear unabh. Vektoren aus einer endlichen Menge von Vektoren} = $\mathcal{J}$

Greedy Algorithmus für Matroide

1. sortiere Menge E aufsteigend: $w(e_1) < w(e_2) < \ldots < w(e_m)$

2. $B := \{e_1\}$

3. solange $|B| < r$ (= Kardinalität einer $\subseteq$-max. unabh. Menge, Basis von $(E, \mathcal{J})$ alle haben gleiche Kardinalität)

wähle in Reihenfolge $e_2, e_3 \ldots$ das erste Element mit $B \cup \{e\} \in \mathcal{J}$, setze $B := B \cup \{e\}$

$\boxed{\text{Beim Abbruch ist } B \text{ eine Basis von } (E, \mathcal{I}) \text{ mit minimalem Gewicht}}$

Beweis: Sei $A = \{e_1, \dots, e_\nu\}$ die vom Algorithmus erzeugte unabhängige Menge

Sei $B := \{f_1, f_2, \dots, f_\nu\}$ eine Basis mit minimalem Gewicht, beide aufsteigend sortiert bzgl. Gewicht w.

Sei r der erste Index mit $w(e_r) > w(f_r)$ (kein solches r $\Rightarrow$ fertig)

Dann gilt: $\{e_1, \dots, e_{r-1}\} \in \mathcal{I}$, $\{f_1, \dots, f_r\} \in \mathcal{I}$

$$|\{e_1, \dots, e_{r-1}\}| < |\{f_1, \dots, f_r\}|$$

$\Rightarrow \exists f \in \{f_1, \dots, f_r\}$ mit $\{e_1, \dots, e_{r-1}, f\} \in \mathcal{I}$

$\Rightarrow$ (Sortierung) $w(f) \leq w(f_r) < w(e_r)$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Wahl von e_r im Greedyalgorithmus $\square$

Aufwand:

n^2 Wegberechnungen à $O(m \log n)$

maximal $n \cdot m$ Kreise

Sortierung der Kreise $O(n \cdot m \cdot \log(n \cdot m)) = O(n \cdot m \log n)$

maximal $\nu \leq m$ Tests auf Unabhängigkeit

1 Test = Gauss-Elimination in $m \times \nu$ Matrix $\leq m^3$

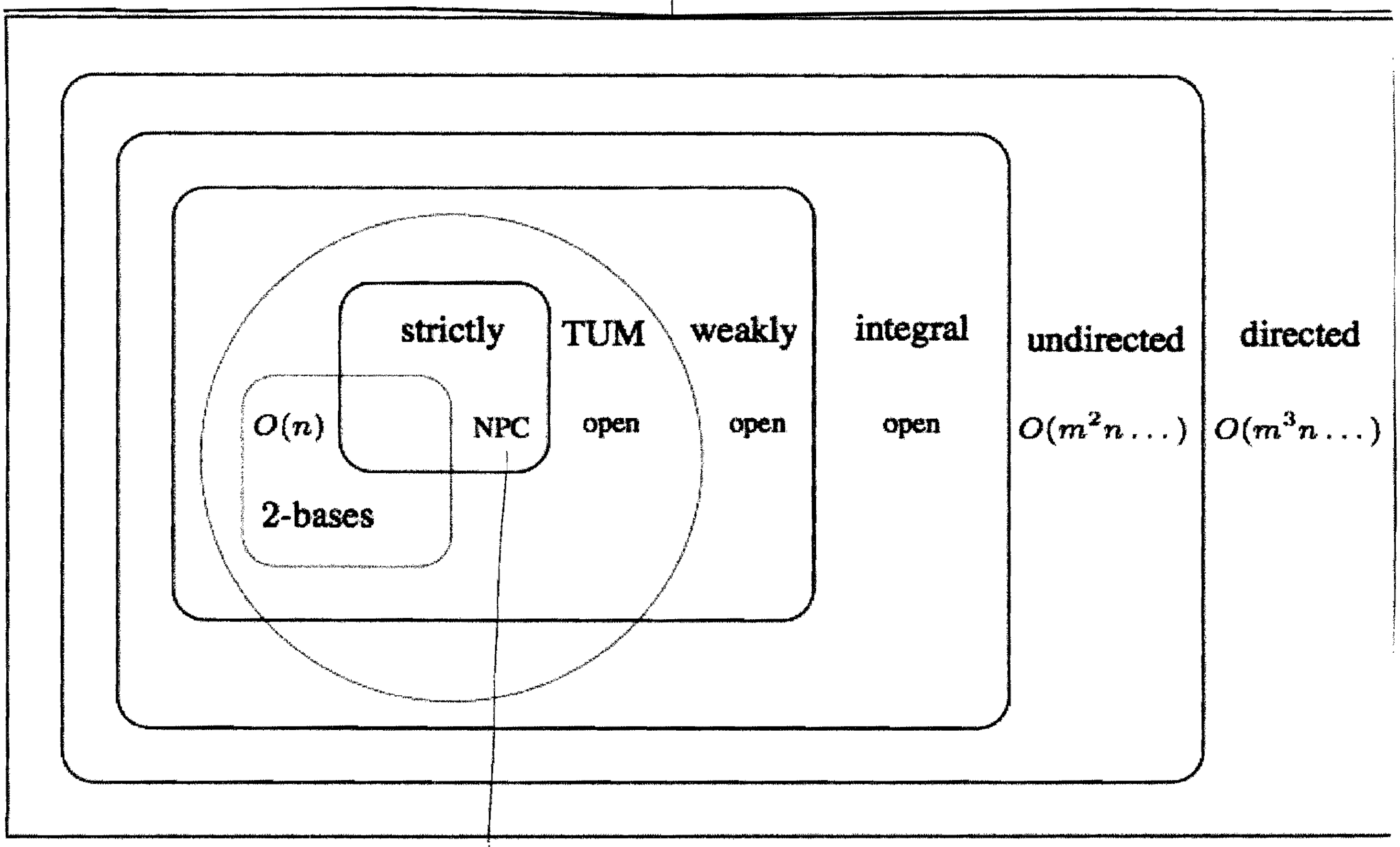
$\Rightarrow O(m^4)$

verbesserbar auf $O(m^\omega \cdot n)$

schnelle Matrizenmultiplikation, $\omega = 2{,}376$

12-10

Kurze Basen in anderen Klassen von Basen



sogar MAX-SNP-vollständig !