Kurze Kreisbasis $\hat{=}$ kleine Länge

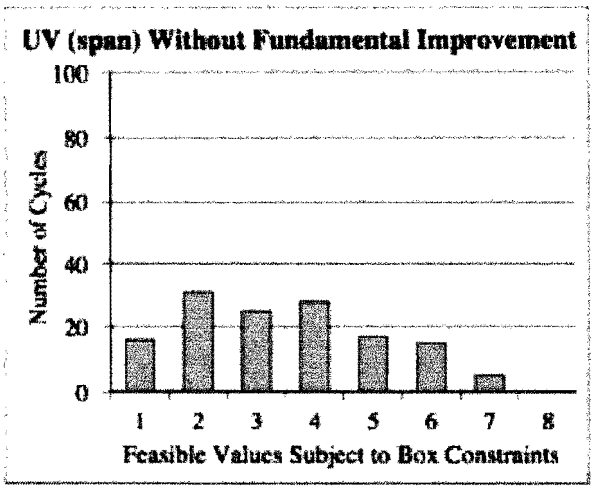
minimale Kreisbasis (in einer bestimmten Klasse)

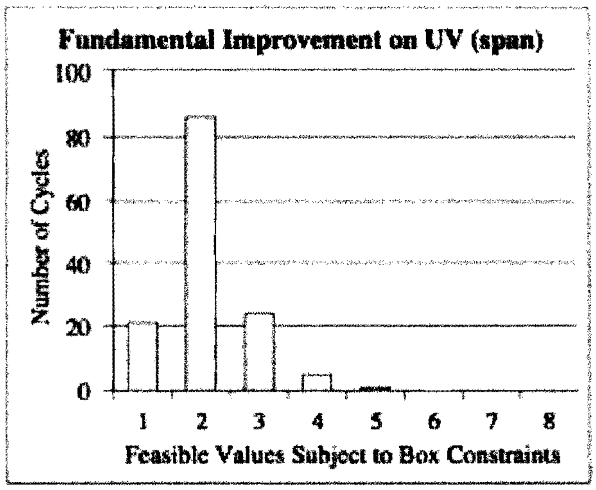
= Basis mit kleinster Länge aus der Klasse

hat Einfluss auf Rechenzeit von CPLEX

da Spanne $\bar{q}_c - \underline{q}_c + 1$ deutlich kleiner wird

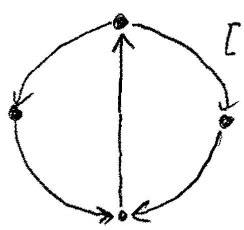
---





- Rechenzeiten sinken um mehrere 100%
- Instanz lösbar wenn Größe Suchraum $\leq 10^{50}$
- Instanz unlösbar .... $\geq 10^{90}$

Beispiel:



$[7,13]_{10}$ an jeder Kante

Abschätzung über Potenzialwerte: 4 $\pi_i \in \{0, \dots T-1\}$

$\rightsquigarrow 10^4$ Kombinationen prüfen = 10.000

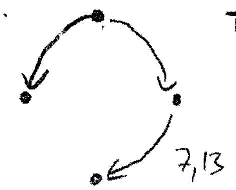
für jede Kombination pro Kante geeignetes pa suchen (leicht)

Abschätzung über Spannungen

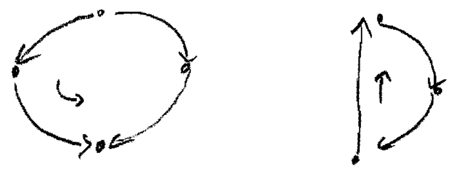
pro Kante $x_a \in \{7, \dots, 13\}$ $\Rightarrow$ 7^5 Kombinationen $= 16.807$

für jede Kombination pro Kante prüfen ob $\Gamma^T x = z \cdot T$ ist (leicht)

Abschätzung über Basis

a) 

T_1 Basis = Fundamentalkreise bzgl T_1



C_1 C_2

Schranken aus Kreisgleichungen

$$\underline{q}_{C_1} = \left\lceil \frac{1}{10}\left((7+7)-(13+13)\right)\right\rceil = -1$$

$$\overline{q}_{C_1} = \left\lfloor \frac{1}{10}\left(13+13)-(7+7\right)\right\rfloor = 1$$

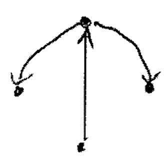
$\Rightarrow$ $-1 \leq q_{C_1} \leq 1$

$$\underline{q}_{C_2} = \left\lceil \frac{1}{10}(7+7+7)\right\rceil = 3$$

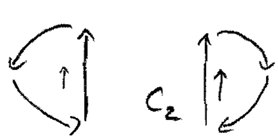
$$\overline{q}_{C_2} = \left\lfloor \frac{1}{10}(13+13+13)\right\rfloor = 3$$

$\Rightarrow$ $q_{C_2} = 3$

$\Rightarrow$ nur 3 mögliche Lösungen!

b) 

T_2 Basis = Fundamentalkreise bzgl. T_2

C_1  C_2

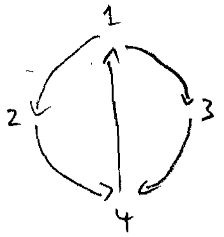
beide liefern dieselben Schranken

$$\underline{q}_{C_1} = \underline{q}_{C_2} = \left\lceil \frac{1}{10}(7+7+7)\right\rceil = 3$$

$$\overline{q}_{C_1} = \overline{q}_{C_2} = \left\lfloor \frac{1}{10}(13+13+13)\right\rfloor = 3$$

$\Rightarrow$ nur 1 Lösung

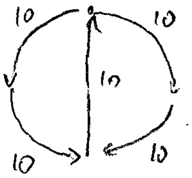
Lösung x ergibt sich aus $\Gamma^T x = T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$



$$\begin{array}{c|ccccc} & (1,2) & (1,3) & (2,4) & (3,4) & (4,1) \\ \hline C_1 & 1 & & 1 & & 1 \\ C_2 & & 1 & & 1 & 1 \end{array} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$7 \leq x_{ij} \leq 13$$

z.B. erfüllt durch



bestes x ergibt sich aus

$\min \sum w_{ij} x_{ij}$

unter den obigen Bedingungen

§ 12 Kurze Kreisbasen in der Menge aller Kreisbasen ist polynomial (im Gegensatz zu manche Teilklassen)

zunächst einige Vorbereitungen:

Zielfunktion $\sum\limits_{C \in B} \sum\limits_{a \in C} (u_a - l_a)$ hängt nicht von Orientierung der Kanten ab $\Rightarrow$ kann zugrunde liegenden ungerichteten Graphen verwenden

Bzgl. ungerichteter Graphen betrachtet man in der Regel den Kreisraum über GF(2). Folgendes Lemma zeigt, dass dies auch bzgl. kurzer Basen möglich ist

12.1 LEMMA: Sei G ein Digraph und G' der zugrundeliegende ungerichtete Graph. Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von ν Kreisen aus dem Zykelraum von G in $\mathbb{R}^E$ und sei $\mathcal{B}'$ die Menge der zugehörigen ungerichteten Kreise in G'. Dann gilt:

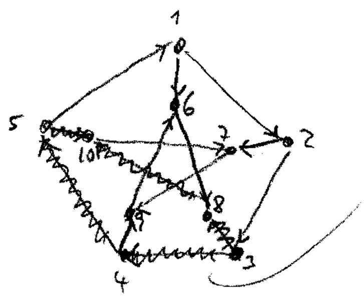
$$\det \mathcal{B} \text{ ist ungerade} \iff \mathcal{B}' \text{ ist Zykelbasis von } G' \text{ bzgl. } GF(2)$$

Beweis: Betrachte Laplace Entwicklung von $\det \mathcal{B}$ und $\det \mathcal{B}'$. Dann gilt wegen Rechnung in $GF(2)$

$$\det \mathcal{B} = 2k,\ k \in \mathbb{N} \iff \det \mathcal{B}' = 0 \qquad \square$$

Beispiel: Es gibt Basen in G über $\mathbb{R}$, die keine Basis von G' über $GF(2)$ induzieren

Petersen Graph:



jeder dieser Kreise + der innere Stern bilden Basis

(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(6,8)	(8,10)	(10,7)	(7,9)	(9,6)	(1,6)	(2,7)	(3,8)	(4,9)	(5,10)
1	1				-1					-1		1		
	1	1						-1			-1		1	
		1	1			-1						-1		1
			1	1					-1	1			-1	
1				1			-1				1			-1
					1	1	1	1	1					

Summe der Kreise $\neq 0$ über $\mathbb{R}$, aber $= 0$ über $GF(2)$

12.2 FOLGERUNG: Jede ganzzahlige in G ist eine Basis in G'

d.h. es reicht, im ungerichteten Graphen eine kurze Basis zu finden und dann zu prüfen, ob sie im gerichteten gzz. ist.

vorteilhaft, da Linearkombinationen über GF(2) besonders einfach sind, nur Koeffizienten 0, 1

12.3 ALGORITHMUS (de Pina 95, Berger et al 04, Kavitha et al 05)

Input: Ein ungerichteter zh. Graph G mit positiven Kantengewichten w_e

Output: eine minimale Kreisbasis $\mathcal{B}$ über GF(2)

Methode: (Berechne Kreise aus $\mathcal{B}$ iterativ, indem man einen kürzesten Kreis aus dem orthogonalen Komplement der bisherigen wählt)

1. $\mathcal{B} := \emptyset$
2. <u>for</u> $i := 1$ <u>to</u> ν <u>do</u>
3. <u>if</u> $i = 1$ <u>then</u> sei $S_1 \in \{0,1\}^m$ beliebig, $S_1 \neq 0$
   <u>else</u>
4. sei $S_i \neq 0$ in $\{0,1\}^m$ orthogonal zu den bereits berechneten Kreisen $C_1, \dots, C_{i-1}$ aus $\mathcal{B}$
   d.h., S_i ist nichttriviale Lösung x des linearen Gleichungssystem
   $$g(C_k)^T \cdot x = 0 \qquad k = 1, \dots, i-1$$
5. berechne den kürzesten Kreis C_i (d.h. $w(C_i)$ minimal) mit $g(C_i)^T \cdot S_i = 1$
6. $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{C_i\}$

12.4 SATZ (de Pina 95; Berger et al 04; Kavitha et al 04)
Algorithmus 12.3 berechnet eine kürzeste Kreisbasis über GF(2)

Beweis: Annahme nicht. Betrachte dann das kleinste i so dass $C_1, \dots, C_{i-1}$ zu einer minimalen Kreisbasis B^* erweiterbar ist, aber nicht $C_1, \dots, C_{i-1}, C_i$

B^* Basis $\Rightarrow$ C_i ist durch Kreise aus B^* linear kombinierbar,

etwa $\underbrace{C_i = D_1 + \dots + D_k}$ (1)

Inzidenzvektoren und Kreise identifiziert

$C_i^T \cdot S_i = 1$ ergibt $\sum_{\ell=1}^{k} D_\ell^T \cdot S_i = 1$

$\Rightarrow$ (GF(2)) mindesten ein $D_j^T \cdot S_i = 1$

$\Rightarrow$ (C_i kürzester Kreis mit $C_i^T S_i = 1$) $w(C_i) \le w(D_j)$

Betrachte $B' := B^* - \{D_j\} \cup \{C_i\}$

(1) $\Rightarrow$ $D_j = C_i + D_1 + \dots + D_{j-1} + D_{j+1} + \dots + D_k$

$\Rightarrow$ D_j durch B' ausdrückbar

$\Rightarrow$ B' ist ebenfalls Basis

Claim: $B' \supseteq \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$

Beweis Claim: $\{C_1, \dots, C_{i-1}\} \subseteq B^*$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Aus } B^* \text{ weggelassener Kreis } D_j \notin \{C_1, \dots, C_{i-1}\} \\ \text{da } D_j^T S_i = 1 \text{, aber } C_\ell^T S_i = 0 \text{ für } \ell = 1, \dots, i-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Claim}$$