§ 11 Schranken für q_c und kurze Kreisbasen

Haben durch die bisherigen MIP-Formulierungen 2 verschiedene "Suchräume"

(1)

zulässige periodische Potenziale
$=$ gzz $\underbrace{\text{Periodenoffsets } p_a}_{\text{Suchraum, schwer zu finden}} + \underbrace{\text{zulässiges Potenzial}}_{\text{einfach bei gegebenen } p_a}$

(2)

zulässige periodische Potenziale
$=$ gzz Vielfache q_c von $\dot{T}$ bzgl. gzz. Basis des Zykelraums (Suchraum, schwer zu finden) $+$ zulässige Vektor x d.h. $l_a \le x_a \le u_a$ (einfach bei gegebenen q_c)

Welcher Suchraum ist besser? kleiner?

Maß für "Güte" könnte die Herleitung von unteren oberen Schranken für die p_a bzw q_c sein.

Ist $\underline{q}_c \le q_c \le \overline{q}_c$ so gilt für den Suchraum der q_c

$$\{\text{mögliche Vektoren } q\} \subseteq \prod_{c \in \mathcal{C}} [\underline{q}_c, \overline{q}_c]$$

Kreisbasis

$$\Rightarrow \quad \text{Größe Suchraum} \le \prod_{c\in\mathcal{C}} (\overline{q}_c - \underline{q}_c + 1)$$

Maß für Güte

11.1 Schranken an die q_C durch Kreisungleichungen

> **11.1 SATZ** (Odijk 94): Es gibt eine zulässige periodische Spannung x zu Kreisvielfachen q_C
>
> $\Longleftrightarrow \quad q_C \leq \frac{1}{T}\Big(\sum\limits_{a \in C^+} u_a - \sum\limits_{a \in C^-} l_a \Big)$ für jeden elementaren Kreis C

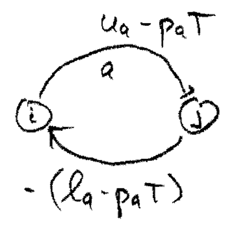
Beweis:

Sei x zulässige periodische Spannung

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ Periodenoffsets p_a mit: $l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a \quad \forall a \in E(G)$

$\Longleftrightarrow$ x_a ist zulässige aperiodische Potenzialdifferenz bzgl. Restriktionen $[l_a - p_a T, u_a - p_a T]$ auf Kante a

$\Longleftrightarrow$ (Satz 9.1) Digraph $\overline{G}$ mit Kantengewichten



hat keinen gerichteten Kreis negativer Länge

$\Longleftrightarrow \quad \sum\limits_{a \in C^+} (u_a - p_a T) - \sum\limits_{a \in C^-} (l_a - p_a T) \geq 0 \quad$ $\forall$ elementaren ungerichteten Kreise von G

$\Longleftrightarrow \quad \sum\limits_{a \in C^+} u_a - \sum\limits_{a \in C^-} l_a - p^T \gamma(C) \cdot T \geq 0 \quad$ — " —

$\uparrow$ Vektor der p_a

$\Longleftrightarrow \quad p^T \cdot \gamma(C) \leq \frac{1}{T}\Big(\sum\limits_{a \in C^+} u_a - \sum\limits_{a \in C^-} l_a \Big)$

bleibt zu klären: Wie verhält sich q_C zu $p^T \gamma(C)$?

$$x^T \gamma(C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Beweis Satz 10.2} \\ (1) \Rightarrow (2)}}{=} p^T \gamma(C)$$

$= q_C$ □

11.2 KOROLLAR: Die Kreisvielfachen q_C einer zulässigen periodischen Spannung erfüllen die Kreisungleichungen

$$\underbrace{\left\lceil \frac{1}{T}\left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right\rceil}_{=: \underline{q}_C} \le q_C \le \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{T}\left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right) \right\rfloor}_{=: \overline{q}_C}$$

Beweis: $q_C \le \overline{q}_C$ folgt aus Satz 11.1 und q_C ganzzahlig

Sei $\overleftarrow{C}$ der Kreis zu C mit umgekehrter Orientierung

$\Rightarrow \overleftarrow{C}^+ = C^-$, $\overleftarrow{C}^- = C^+$, $q_{\overleftarrow{C}} = -q_C$

Satz 11.1. $\Rightarrow$ $q_{\overleftarrow{C}} \le \frac{1}{T}\left(\sum_{a \in \overleftarrow{C}^+} u_a - \sum_{a \in \overleftarrow{C}^-} l_a \right)$

$\Leftrightarrow -q_C \le \frac{1}{T}\left(\sum_{a \in C^-} u_a - \sum_{a \in C^+} l_a \right)$

$\Leftrightarrow q_C \ge \frac{1}{T}\left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right)$

$\underset{q_C \text{ ganzz.}}{\Longrightarrow} q_C \ge \lceil \quad \dots \quad \rceil = \underline{q}_C$ □

11.2 Polyedertheoretische Interpretation der Kreisungleichungen

Betrachte das Polyeder

$$Q := \left\{ (\pi, p) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \pi_j - \pi_i + p_a T \le u_a \\ -(\pi_j - \pi_i + p_a T) \le -l_a \end{array} \quad \forall a \in E(G) \right\}$$

= Polyeder der Form $\{ x \mid Ax \le b \}$

Sind bzgl. PESP an gzz. Hülle Q_I von Q interessiert

Wissen aus ADM II, dass Chvatal-Gomory Schnitte gültige Ungleichungen für Q_I definieren

$$\underbrace{y^T A}_{gzz} x \le \lfloor y^T b \rfloor \qquad y \geq 0$$

11.3 PROPOSITION: Die Kreisungleichungen

$$\underline{q}_C \le q_C = p^T \gamma(C) \le \overline{q}_C$$

sind Gomory-Chvatal-Schnitte

Beweis: reicht zu zeigen für $p^T \gamma(C) \le \overline{q}_C$

entspricht Gomory-Chvatal-Schnitt $y^T A x \le \lfloor y^T b \rfloor$

mit $y^T = (y_{a_1}, y_{\bar{a}_1}, \dots, \underbrace{y_{a_m}, y_{\bar{a}_m}})$ für jede Kante a 2 Komponenten für die Ungleichungen $\le u_a$, $\le -l_a$

und $y_a := \gamma(C)_a$, $y_{\bar{a}} := |\gamma(C)_a|$

$$\Rightarrow y^T A x = \underbrace{\sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) + \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i)}_{=0 \text{ entlang Kreis}} + T \cdot \underbrace{\Big(\sum_{a \in C^+} p_a - \sum_{a \in C^-} p_a \Big)}_{p^T \cdot \gamma(C) = q_C} \le \Big\lfloor \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \Big\rfloor$$

□

11.4 PROPOSITION: Der Chvatal-Rang von Q ist unbeschränkt (mit wachsender Graphengröße n).
Speziell ist also $Q_I \subsetneq Q$ + Kreis-Ungleichungen

Beweis nutzt allgemeines Resultat von Boyd & Pulleyblank 84 über Chvatal Rang und NP-Theorie:

11.5 SATZ: Sei $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine polynomial lösbare Familie rationaler Polyeder $P^k \subseteq \mathbb{R}^{n_k}$ mit n_k Variablen, so dass das Problem

Geg: k, $c \in \mathbb{Q}^{n_k}$, $\delta \in \mathbb{Q}$
Frage: ist $\max_x \{ c^T x \mid x \in P^k, \ x \text{ ganz} \} > \delta$

NP-vollständig ist. Ist dann $NP \neq coNP$, so existiert kein $t \in \mathbb{N}$ mit $(P^k)^{(t)} = (P^k)_I$ für alle $k \in \mathbb{N}$

ohne Beweis (siehe Schrijver-Buch 1986, einfach mit Sätzen aus ADM II) $\square$

Beweis Proposition 11.4: $P^k := Q^{n+m}$ (mit $n \uparrow \pi$, $m \uparrow p$) $\qquad k = n+m$

MAX Variante von PESP NP-vollständig
$\Rightarrow$ Voraussetzungen von Satz 8.5 erfüllt
$\Rightarrow$ rang(P^k) unbeschränkt $\square$

AUFGABE 15 Finden einer gültigen Ungleichung für Q_I, die nicht von einer Kreisungleichung "dominiert" wird.

11.3 Kleiner Suchraum durch kurze Kreisbasen

Sei $\mathcal{B}$ eine ganzzahlige Kreisbasis (= Basis des Zykelraums)

Korollar 8.2 $\Rightarrow$

$$\underbrace{\left\lceil \frac{1}{T}\left(\sum_{a\in C^+} l_a - \sum_{a\in C^-} u_a\right)\right\rceil}_{\underline{q}_c} \le q_c \le \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{T}\left(\sum_{a\in C^+} u_a - \sum_{a\in C^-} l_a\right)\right\rfloor}_{\overline{q}_c}$$

$\Rightarrow$ mögliche Werte von q_c sind $\underbrace{\underline{q}_c,\ \underline{q}_c+1, \dots, \underline{q}_c+k = \overline{q}_c}_{\overline{q}_c - \underline{q}_c + 1 \text{ Werte}}$

$\Rightarrow$ Maß für Größe des Lösungsraums ist

$$\prod_{C\in\mathcal{B}} \left(\overline{q}_c - \underline{q}_c + 1\right) \longrightarrow \text{klein}$$

$$\hat{=} \prod \underbrace{\left(\frac{1}{T}\left(\sum_{a\in C^+} u_a - \sum_{a\in C^-} l_a\right) - \frac{1}{T}\left(\sum_{a\in C^+} l_a - \sum_{a\in C^-} u_a\right)\right)}_{\frac{1}{T}\sum_{a\in C^+}(u_a - l_a) + \sum_{a\in C^-}(u_a - l_a)} \longrightarrow \text{klein}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{a\in C}(u_a - l_a)$$

$$\underset{\log}{\overset{\uparrow}{\hat{=}}} \quad \sum_{C\in\mathcal{B}} \log \sum_{a\in C}(u_a - l_a) \quad \text{klein}$$

$\hat{=}$ Länge der Basis $\mathcal{B}$ bzgl. Kantenbewertung $u_a - l_a$

also $\sum_{C\in\mathcal{B}} \sum_{a\in C}(u_a - l_a)$