10.3 FOLGERUNG (Liebchen & Peeters 03): Satz 10.2 bleibt gültig, wenn Eigenschaft (3) für Kreise einer ganzzahligen Basis erfüllt ist

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) wie bisher

(3) für gzz. Basis $\Rightarrow$ (3) für Baumbasis $\overset{\text{wie bisher}}{\Rightarrow}$ (1)

denn: sei C Kreis aus Baumbasis

$$\Rightarrow C = \sum_k \underset{\text{gzz Koeffizienten}}{\lambda_k}\ \underset{\text{Kreise aus gzz Basis}}{\gamma(C_k)}$$

$$\Rightarrow x^T \gamma(C) = \sum_k \lambda_k \underbrace{x^T \gamma(C_k)}_{= z_k \cdot T} \qquad z_k \text{ gzz wegen (3)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum \lambda_k z_k\right)}_{\text{gzz}} T \qquad \Box$$

Frage: Kann man ganzzahlige Basen charakterisieren?

Dazu: Definition der <u>Zykelmatrix Γ</u> einer Basis des Zykelraums

= Kanten-Basiskreise Inzidenzmatrix

$$\begin{array}{c|ccc} & C_1 & \cdots & C_\nu \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & \gamma(C_j) & \\ a_m & & & \end{array} \qquad \nu = m-n+1$$

10.4 LEMMA: Seien Γ_1, Γ_2 zwei nichtsinguläre $\nu \times \nu$ Teilmatrizen von Γ. Dann gilt $\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2$

Beweis:

(1) $\boxed{\text{Eine Teilmenge } \Gamma' \text{ von } \nu \text{ Zeilen von } \Gamma \text{ ist maximal linear unabhängig} \Leftrightarrow \text{die entsprechenden Kanten sind Nichtbaumkanten eines spannenden Baumes}}$

$\Leftarrow$ Sei T ein spannender Baum und $a_1, \dots, a_\nu$ die Nichtbaumkanten.

Sei Φ die Kanten – Fundamentalkreis Matrix bzgl. T

$\Rightarrow \exists$ $\nu \times \nu$ - Matrix R mit $\Gamma R = \Phi$ (Linearkomb. der Kreise in Φ aus Kreisen in Γ)

Teilmatrix von Φ zu $a_1, \dots, a_\nu$ ist Einheitsmatrix (und geeignete Permutation)

d.h.

$$\Gamma' := \left[\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_\nu \end{array}\right. \overset{\Gamma}{\begin{pmatrix} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{pmatrix}} R = \overset{\Phi}{\begin{pmatrix} & \equiv & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_\nu \end{array}$$

$\Rightarrow \Gamma' R = I \quad \Rightarrow R = (\Gamma')^{-1} \quad \Rightarrow \Gamma'$ nicht singulär

$\Rightarrow$ ν Zeilen von Γ' sind (maximal) lin. unabhängig

$\Rightarrow$ Ann. die $n-1$ Zeilen nicht in Γ' enthalten einen Kreis C

$\Rightarrow \varrho(C)$ eindeutig als $\underset{\text{nichttriviale}}{\text{LK}}$ der Kreise aus Γ darstellbar

$\Rightarrow \exists$ Vektor λ_c mit $\Gamma \cdot \lambda_c = \varrho(C)$

Streiche in Γ und $\varrho(C)$ die Kanten aus C $\to \Gamma^\circ, \varrho(C)^\circ$

$\Rightarrow \Gamma \cdot \lambda_c = \varrho(C)$ wird zu $\Gamma^\circ \cdot \lambda_c = \varrho(C)^\circ = 0$

$\Gamma_0 \supseteq \Gamma'$

$\Rightarrow \lambda_c$ kombiniert die Spalten aus Γ' zu 0.

Widerspruch zu lin. Unabh. von Γ'

(2) $\boxed{\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2}$

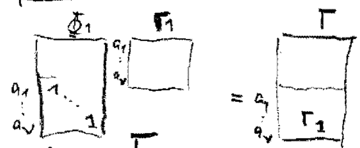
(1) $\Rightarrow$ Zeilen aus $\Gamma_1 \triangleq$ Nichtbaumkanten eines spann. Baumes T_1

Sei Φ_1 $\underbrace{\text{Kanten-Fundamentalkreis Matrix}}$ bzgl T_1

diese Matrizen sind vollständig unimodular

$\boxed{\text{AUFGABE 12}}$

$\Phi_1 \cdot \Gamma_1 = \Gamma \quad \leftarrow \boxed{\text{AUFGABE 13}}$



Betrachte in Φ_1 und Γ nur die Zeilen aus T_2

$\Rightarrow \Phi_1^\circ \Gamma_1 = \Gamma_2$

$\det \Phi_1^\circ = \pm 1$ da Φ_1 $\underbrace{\text{vollst. unimod}}_{}$ und Γ_1, Γ_2 nichtsingulär $\Rightarrow \det \Gamma_2 = \pm \det \Gamma_1$ $\square$

wegen Lemma 10.4 ist folgende Definition sinnvoll

Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von ν Kreisen von G und sei $\Gamma_\mathcal{C}$ die Kanten-Kreis-Inzidenzmatrix zu $\mathcal{C}$. Dann heißt

$\det \mathcal{C} := |\det \Gamma'|$ wo Γ' entsteht aus Γ durch Streichen von Zeilen zu einem (beliebigen) spannenden Baum von G

die Determinante von $\mathcal{C}$

$$\boxed{\textbf{10.5 FOLGERUNG}: \ \mathcal{C} \text{ ist eine Basis des Zykelraums} \iff \det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+}$$

Beweis "$\Leftarrow$" $\det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \det \mathcal{C} \neq 0 \Rightarrow \Gamma'$ nicht singulär

$\Rightarrow$ Spalten von Γ' lin unabh

$\Rightarrow$ Spalten von Γ = Kreise lin. unabh. $\square$

"$\Rightarrow$" Umkehrung der obigen Schlüsse $\Rightarrow \det \mathcal{C} \neq 0$

Γ' ganzz $\Rightarrow |\det \Gamma'| \in \mathbb{Z}_+$ $\square$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{10.6 SATZ (Liebchen 03):}\\ \mathcal{C} \text{ ist eine ganzzahlige Basis} \iff \det \mathcal{C} = 1\end{array}}$$

Beweis:

Aus LinA bekannt: $\boxed{|\det B| = 1 \text{ für gzz Matrix } B \iff B^{-1} \text{ gzz}}$ (1)

$\uparrow$ unimodale Matrizen

Sei C ein beliebiger Kreis von G, sei λ_C der Vektor der Koeffiziente in der Lin.komb. bzgl. Basis $\mathcal{C}$, d.h. $\Gamma_{\mathcal{C}} \cdot \lambda_C = \gamma(C)$

$\nearrow$ überbestimmtes Gleichungssystem m Zeilen, ν Spalten u. Variablen

Reicht zu lösen für ν lin. unabh. Zeilen

Nehme dafür die Nichtbaumkanten $a_1, \dots, a_\nu$ bzgl. spann. Baum T

$$\Rightarrow \quad \Gamma_{\mathcal{C}}^0 \, \lambda_C = \gamma(C)^0 \qquad (2)$$

"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{C}$ gzz $\overset{10.5}{\Rightarrow} |\det \Gamma_{\mathcal{C}}^0| \in \mathbb{Z}_+$ und λ_C gzz

Betrachte Kreis C der durch a_j erzeugt wird $\Rightarrow \gamma(C)^0 = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow a_j$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{gzz}}}{\lambda_C} = \Gamma_{\mathcal{C}^0}^{-1} \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\Gamma_{\mathcal{C}}^{-1}\right)_{\text{Spalte } j}$ ist gzz

dies gilt für alle $j \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{\mathcal{C}}^{-1}$ gzz $\overset{(1)}{\Rightarrow} |\det \Gamma_{\mathcal{C}}^{-1}| = 1$

$\Rightarrow \det \mathcal{C} = 1$

"$\Leftarrow$" Sei $\det \mathcal{C} = 1 \quad \Rightarrow$ (Cramersche Regel) $(\lambda_C)_j = \dfrac{\det (\Gamma_{\mathcal{C}}^0)^j}{\det \Gamma_{\mathcal{C}}^0}$ gzz $\square$

Diese Erkenntnisse führen zu neuer MIP-Formulierung

Basiert auf Zusammenhang

$$\Gamma^T x = T \cdot q$$

Matrix der Basis transponiert

$x \in \mathbb{R}^E$

Taktfaktor

gzz Vielfache für jeden Kreis der Basis d.h. $q \in \mathbb{Z}^\nu$

$$\begin{array}{cc} & \text{Kanten} \\ \begin{array}{c}\text{Basis}\\ \text{Kreise}\end{array} & \boxed{} \end{array} \begin{pmatrix} \\ \text{Kanten} \\ \\ \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ q_c \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Vielfache der Basiskreise, q_c sind gzz. Variable

brauchen gzz Basis

Gleichung entspricht Bed (3) aus Satz 10.2 und garantiert, dass x ein periodisches Potenzial ist

MIP auf Basis von Kreisvariablen q_c:

$$\min \sum_a w_a \cdot x_a$$

unter
$$\Gamma^T x = T \cdot q$$
$$l \leq x \leq u$$
$$q \text{ gzz}$$

10.7 LEMMA Ist q bekannt, so ergibt sich x hieraus in polynomialer Zeit und x ist ebenfalls gzz.

Beweis: Sei q gzz und fest

$\Rightarrow$ x wird bestimmt durch Lösung des Gleichungssystem

$$\Gamma^T x = T \cdot q$$

$\Rightarrow$ polynomial (z.B. Gauss oder effizientere Methode bei speziellen Basen)

$$\left.\begin{array}{l} \det T = 1 \\ q \text{ gzz} \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{Cramer}) \quad x \text{ gzz} \qquad \square$$

Fragen:

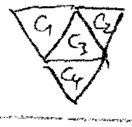
1. Was sind "gute" Basen für dieses MIP $\rightarrow$ §11
2. Wie sieht die Landschaft der gzz. Basen aus?

10.8 SATZ Die folgenden Kreismengen sind gzz. Basen:

(1) die Fundamentalkreise bzgl. eines spannenden Baumes
"<u>Fundamentale Kreisbasen</u>"

(2) Jede Menge von ν Kreisen $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ mit der Eigenschaft $C_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \neq \emptyset$
"<u>schwache Fundamentale Kreisbasen</u>"

(3) Die Menge der Facetten (außer der äußeren) eines planaren Graphen
"<u>2-Basis</u>"



Beweis + Überlegung wie man für diese Basen das Gleichungssystem $\Gamma^T x = Tq$ nach x löst

= $\boxed{\text{Aufgabe 14}}$