

9.3 Komplexität des PESP

Das aperiodische zulässige Potenzialproblem ist in P
(folgt aus Satz 9.1)

9.2 SATZ: Das periodische zulässige Potenzialproblem ist stark NP-schwer, selbst für festes $T \geq 3$

[Nachhall 96]

Beweis: Reduktion von k-Färbbarkeit von Graphen

Gegeben: ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: kann G mit k Farben gefärbt werden?

Betrachte Instanz von k-Färbbarkeit.

Konstruiere PESP-Instanz wie folgt:

$D =$ Digraph, der aus G durch beliebige Orientierung der Kanten von G entsteht

$a \in A(D) \rightarrow [\bar{u}_a, u_a] := [1, T-1]$ mit $T := k$

Dann gilt:

π ist zulässiges periodisches Potenzial

$$\Leftrightarrow 1 \leq \pi_j - \pi_i + p_a \cdot T \leq T-1 \quad \forall a$$

$$\Leftrightarrow \pi_i \neq \pi_j \pmod{T} \quad \forall a$$

$$\Leftrightarrow \pi_i \pmod{T} \text{ definiert eine } k\text{-Färbung von } G \quad \square$$

Der Kern der NP-Vollständigkeit ist das Finden der Perioden-Offsets p_a .

Für gegebene p_a ist das Entscheidungsproblem in P.

$$\text{da } l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_a T \leq u_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{l_{ij} - p_a T}_{\text{feste Zahl}} \leq \pi_j - \pi_i \leq \underbrace{u_{ij} - p_a T}_{\text{feste Zahl}}$$

↑
entspricht aperiodischem zulässigen Potenzialproblem

Ebenso ist das MIP leicht, wenn die p_a bekannt sind

Entsprechendes gilt für

MAX-T-PESP

Gegeben: Digraph G mit l_a, u_a für jede Kante a , $T \in \mathbb{N}$

Gesucht: Potenzial π mit

$$l_a \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a \quad \forall a = (i, j) \in A'$$

mit $|A'|$ so groß wie möglich

9.3 SATZ: MAX-T-PESP ist für jedes $T \geq 2$ MAXSNP-vollständig

Beweis: Durch L-Reduktion von MAX-2-COLORING \square

§ 10 Charakterisierung periodischer Potentiale

$$\text{Bspw: } \min \sum u_a x_a$$

$$\text{unter } x_a = \pi_j - \pi_i \quad \forall a = (i, j)$$

$$l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a \quad \forall a$$

$$0 \leq x_a \leq T-1$$

$$p_a \text{ ganzzahlig} \quad x_a, \pi_i \text{ reell}$$

Formulierung in
Knotenvariablen π_i
und Periodenoffsets p_a
mit Kantenvariablen
 x_a als Hilfsgrößen

= Formulierung im Potenzialraum

diese war schlecht für Lösbarkeit und MIP-Solver

10.1 Formulierung im Spannungsraum

↑
genauer: Raum der periodischen Spannungen

Frage: wie kann man periodische Spannungen unabhängig von
periodischen Potentialdifferenzen charakterisieren?

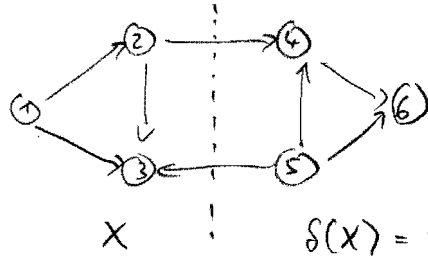
zuerst: aperiodische Spannung = Potentialdifferenzen

10.1 LEMMA: Die Menge der aperiodischen Spannungen eines
Digraphen G ist gleich dem Zykelraum von G

Zur Erinnerung an ADM I

Zykelraum = der von den Inzidenzvektoren elementare Kreise
aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{E(G)}$

Kozykelraum = der von den Inzidenzvektoren von Schnitt $S(X)$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{E(G)}$

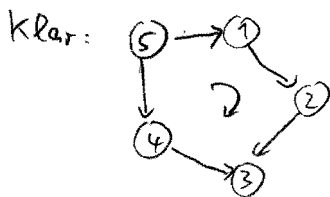


$X \quad \vdots \quad S(X) = \{(2,4), (5,3)\} \rightarrow \mathcal{B}(S(X)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (2,4) \right.$
 $\left. \leftarrow (5,3) \right.$

Zykelraum und Kozykelraum sind orthogonal zueinander und $\dim(\text{Zykelraum}) + \dim(\text{Kozykelraum}) = \dim(\mathbb{R}^E)$

Beweis Lemma (21):

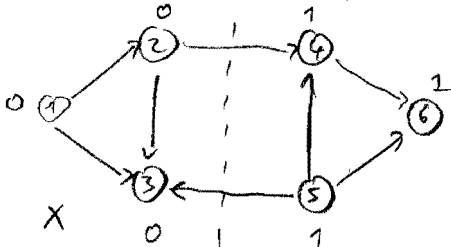
(1): C ungerichteter Kreis und VK C^+ , RK C^- } $\Rightarrow \sum_{(i,j) \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{(i,j) \in C^-} (\pi_j - \pi_i) = 0$
 π Potenzial



$\Rightarrow (\pi_2 - \pi_1) + (\pi_3 - \pi_2) - (\pi_3 - \pi_4) - (\pi_4 - \pi_5) + (\pi_5 - \pi_1) = 0$

(1) \Rightarrow Vektoren von Potenzialdifferenzen sind orthogonal zum Zykelraum

(2): Inzidenzvektoren von Schnitt sind Potenzialdifferenzen



$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (2,4) \right.$
 $\left. \leftarrow (5,3) \right.$

(3): Potenzialdifferenzen bilden einen Vektorraum

Sei x Potenzialdifferenz zu π und y Potenzialdifferenz zu ϕ

$\Rightarrow (x+y)_{ij} = x_{ij} + y_{ij} = (\pi_j - \pi_i) + (\phi_j - \phi_i) = (\pi + \phi)_j - (\pi + \phi)_i$

$\Rightarrow x+y$ ist Potenzialdifferenz zu $\pi+b$

entsprechend: λx ist Potenzialdifferenz zu $\lambda\pi$

$$\text{da } (\lambda x)_{ij} = \lambda x_{ij} = \lambda(\pi_j - \pi_i) = (\lambda\pi)_j - (\lambda\pi)_i$$

(1), (2), (3) $=$ Menge der Potenzialdifferenzen

$=$ Zykelraum von G \square

Jetzt: periodische Spannungen ($\stackrel{\text{Def}}{=} \text{Potezialdifferenzen von periodischen Potenzialen}$)

erweisen sich als "nahezu" orthogonal zum Zykelraum

10.2 SATZ (Serafini & Ukovich 89): Sei G ein Digraph. Für $x \in \mathbb{R}^E(G)$ sind folgende Bedingungen äquivalent.

(1) x ist eine periodische Spannung

(2) $x^T \cdot \mathcal{P}(C)$ ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T für jeden Kreis C von G

(3) $x^T \cdot \mathcal{P}(C)$ ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T für jeden Kreis C aus einer "Baum-Basis" des Zykelraums

|
Fundamentalkreise eines spannenden Baumes von G

Beweis:

(1) \Leftrightarrow (2): Sei π das periodische Potenzial zu x

$$\Rightarrow x^T \cdot \mathcal{P}(C) = \sum_{a=(i,j) \in C^+} (\pi_j - \pi_i + p_a \cdot T) - \sum_{a=(i,j) \in C^-} (\pi_j - \pi_i + p_a \cdot T) = \bar{x}^T \cdot \mathcal{P}(C) + zT$$

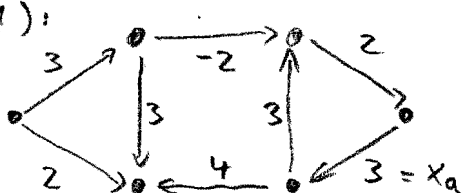
und $\bar{x} =$ Potentialdifferenz an T und $z = \sum_{a \in C^+} p_a - \sum_{a \in C^-} p_a$

$$\Rightarrow x^T \cdot g(C) = \underbrace{x^T \cdot g(C)}_0 + z \cdot T$$

0, da Potentialdifferenzen orthogonal zu Zykeln sind

(2) \Rightarrow (3): trivial

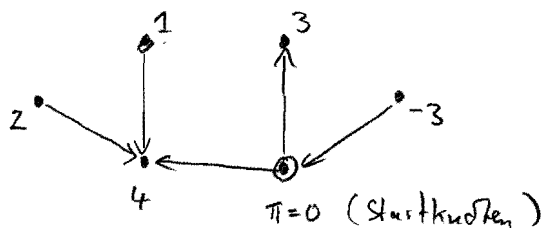
(3) \Rightarrow (1):



x erfüllt (3) bzgl $T=4$

Nutze Baum T zur Definition eines Potentials π auf V , so dass

$\pi_j - \pi_i = x_{ij}$ auf Baumkanten gilt (π ist nach Wahl von π_s in Startknoten s eindeutig bestimmt)



Für Nichtbaumkanten (u,v) gilt

$$\sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) = 0 \quad \text{für den von } (u,v) \text{ erzeugten Fundamentalkreis } C$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{\substack{a \in C^+ \\ a \neq (u,v)}} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) + (\pi_v - \pi_u) =$$

$$= \sum_{\substack{a \in C^+ \\ a \neq (u,v)}} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a + \pi_v - \pi_u$$

$$\stackrel{(3)}{=} \gamma_C \cdot T - x_{uv} + \pi_v - \pi_u$$

↑
Vervielfaches für den Fundamentalkreis C
laut (3)

$$\Rightarrow x_{uv} = \pi_v - \pi_u + y_c T$$

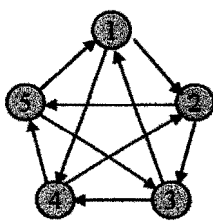
$\Rightarrow x$ ist periodisches Potenzial \square

Aufgabe 11: zu einer zulässigen periodischen Spannung x mit Periodenoffset p_a gibt es eine zulässige periodische Spannung y mit Periodenoffset q_a und $q_a = 0$ für alle Baumkanten

\Rightarrow Reduktion der Suche von Periodenoffsets auf die $m-n+1$ Nichtbaumkanten!

Die Charakterisierung in (3) gilt nicht für beliebige Basen

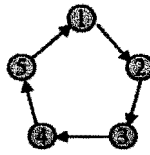
Characterization is not true for arbitrary basis



Outer 3-cycles and inner 5-cycle form a basis
Matrix Γ of incidence vectors is

	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(3,1)	(4,2)	(5,3)	(1,4)	(2,5)
C_1	1					1				
C_2		1					1			
C_3			1					1		
C_4				1					1	
C_5	1				1					1
C_6						1	1	1	1	1

$= \Gamma^T$



$$= \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_4 + \frac{1}{2}C_5 - \frac{1}{2}C_6$$

Example by B. Gerards

Beispiel zeigt, dass (3) \Rightarrow (2) verloren geht!

\Rightarrow man braucht (3) für ganzzahlige Basen

= Basis des Zykelraums, so dass jeder Kreis sich als ganzzahlige Linearkombination von Basiskreisen darstellen lässt