§7 Dynamische Multicommodity-Fluss Probleme mit konstanten Fahrzeiten

The complexity landscape of network flows

	s-t flow	trans-shipment	min-cost	quickest multi-commodity
static	poly		poly	poly (LP)
over time	poly (static min-cost flow)	poly (minimize submodular functions)	pseudo-poly NP-hard	pseudo-poly (LP) NP-hard

[Ford & Fulkerson 1958]

[Hoppe & Tardos 2000]

$\boxed{\text{FPTAS}}$

[Fleischer & Skutella 2002/03]

[Klinz & Woeginger 1995]

Hier nur: 2-Approximation für quickest multi-commodity flows

Gegeben: Digraph G mit Quellen-Senken Paaren (s_i, t_i) und Demand d_i

Gesucht: beste Zeit T in der alles Demand durch dynamischen Fluss geroutet werden kann

(erste Annäherung an Verkehrssituation)

pseudopolynomial lösbar durch Zeitexpansion

Für Approximation betrachte:

statischen Durchschnittsfluss x zu dynamischem Fluss f mit Horizont T

def. durch $x_a := \frac{1}{T} \int_0^T f_a(\theta)\, d\theta$

7.1 LEMMA: Der statische Durchschnittsfluss x zu f erfüllt Kapazitätsbed. und Flusserhaltung (d.h. ist Fluss).
Ferner gilt $\text{value}(x) = \frac{1}{T} \text{value}(f)$, $c(x) = \frac{1}{T} c(f)$

Beweis: $f_a(\theta) \leq u_a \quad \forall \theta$ $\Rightarrow$ Kapazitätsbed.

$$\Rightarrow x_a \leq \frac{1}{T} \int_0^T u_a \, d\theta = u_a$$

Flusserhaltung: Am Ende von T muss f die Flusserhaltung mit "=" erfüllen

$$\Rightarrow \sum_{a \in \delta^-(v)} \underbrace{\int_{\tau_a}^T f(\theta - \tau_a) \, d\theta}_{= \frac{1}{T} x_a} = \sum_{a \in \delta^+(v)} \underbrace{\int_0^T f_a(\theta) d(\theta)}_{\frac{1}{T} x_a}$$

Flusswert

Analog zu Flusserhaltung

Kosten:

$$c(f) = \sum_{a \in A} \int_0^T f_a(\theta) \cdot c_a \cdot d\theta = \sum_{a \in A} c_a T x_a = T c(x) \qquad \square$$

7.2 LEMMA: Der statische Durchschnittsfluss x zu f mit Zeithorizont T ist längenbeschränkt mit Schranke T, d.h. es gibt eine Pfadzerlegung für jedes $s_i t_i$ mit $\tau_p \leq T$ für alle Pfade in der Zerlegung

Beweis: Nutze die Wege bzgl f, diese erfüllen $\tau_p \leq T$ $\square$

Algorithmus zur Konstruktion eines schnellsten Multi-Commodity Flusses, der die demands erfüllt, mit Kosten $\leq c$ (c Input)

[Fleischer & Skutella 2002]

(1) Errate den optimalen Zeithorizont T^* für (2) (binäre Suche)

(2) Berechne einen T^*-längenbeschränkten statischen MC-Fluss $(x_P)_{P \in \mathcal{P}}$ mit (später, wie)

$$\text{value}_i(x) = \frac{1}{T^*} d_i \quad \text{und} \quad c(x) \leq \frac{1}{T^*} c$$

(3) Konstruiere aus x einen dynamischen Fluss f indem entlang $P \in \mathcal{P}$ ein zeitlich wiederholter Fluss mit Raten x_P im Zeitraum $[0, T^*[$ losgeschickt wird

(4) Warte bis aller Fluss in den Senken angekommen ist

7.3 SATZ (Fleischer & Skutella 02)
f ist ein dynamischer Fluss mit Zeithorizont $\leq 2T^*$, der alle Demands erfüllt und Kosten $\leq c$ hat

Beweis: Flusserhaltung, Kapazitätsbed. klar
Keine Speicherung von Fluss in Knoten

$$\text{value}_i(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}_i} T^* \cdot x_P = T^* \text{value}_i(f) = d_i$$ für Knotenpaar (s_i, t_i)

$$c(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} c_P \cdot T^* x_P = \sum_{P \in \mathcal{P}} \left(\sum_{a \in P} c_a \right) T^* \cdot x_P$$

$$= T^* \cdot \sum_{a \in A} c_a \sum_{P \ni a} x_P = T^* \sum_{a \in A} c_a x_a = T^* c(x) \le C$$

Zeithorizont klar, da $\tau_P \le T^*$ □

Offener Punkt: Konstruktion des T^*-längenbeschränkten MC Flusses in Schritt (2) bzw. Feststellung, dass keiner existiert (bzgl. der binären Suche nach T^*)

Ist schwach NP-vollständig, enthält CSP als Spezialfall

ABER: es gibt ein FPTAS wie für CSP

d.h.

Falls es einen T-längenbeschränkten statischen Fluss x gibt, so kann man einen $(T+\varepsilon)$-längenbeschränkten Fluss x' konstruieren mit Kosten $c(x') \le c(x)$ in polynomialer Zeit in der Inputgröße und $\frac{1}{\varepsilon}$

Idee: Formuliere das Finden eines T-längenbeschränkten Flusses x als LP in Pfad Variablen

$\Rightarrow$ das duale Separierungsproblem ist ein CSP

nutze Äquivalenz von Separierung und Optimierung ADM II

AUFGABE 10

Volles PTAS für das Ausgangsproblem durch Kondensieren des zeitexpandierten Netzwerkes, d.h. Skalierung so dass T/Δ polynomial ist, Fahrzeiten runden

Löse statisches Flussproblem im kondensierten Graphen (polynomial)

Interpretiere Lösung als dynamischen Fluss mit ursprünglichen Fahrzeiten

muss "glätten" um Kapazitäten einzuhalten

7.4 SATZ (Fleischer & Skutella 03)
Wählt man $\Delta := \varepsilon^2 T / n$, so erhält man ein kondensiertes zeitexpandiertes Netzwerk mit n/ε^2 Zeitscheiben, das $(1+\varepsilon)$-approximative schnellste Mehrgüterflüsse mit beschränkten Kosten liefert

Quintessenz: Dynamik kostet Faktor $|V|/\varepsilon^2$ bzgl. Netzwerkgröße