## Nachtrag zu Mautgebühren:

Berichtigung zu SATZ 5.6

„⇒" im Beweis ist nicht korrekt

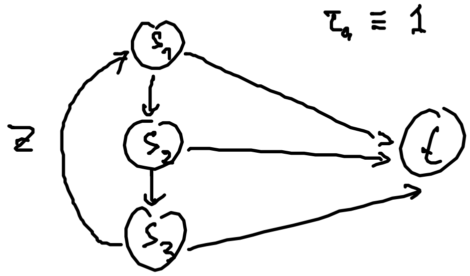
der Zykel $Z$, der am Ende vom Beweis gefunden wird

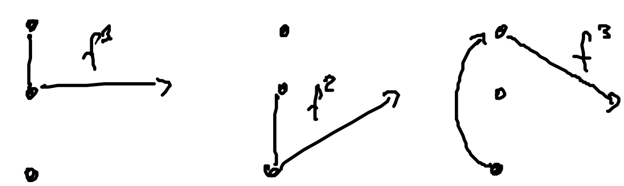
muss nicht notwendig nur aus flussführenden Kanten einer Commodity bestehen

Man kann nur sagen: $Z \subseteq \bigcup_k \bar{A}_k$

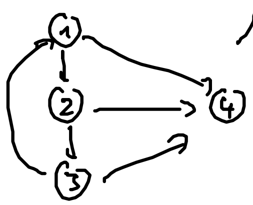
Tatsächlich gibt es Gegenbeispiele:

$\tau_a \equiv 1$ $\qquad f = \sum f^k \qquad d_k = 1$




$\nexists\, \mu$ das $f$ erzwingt, d.h. $M(f) = \emptyset$




$\mu_{ij}$ = Maut auf Kante $(i,j)$

$$f^1: \quad 2 + \mu_{12} + \mu_{24} < 1 + \mu_{14}$$
$$f^2: \quad 2 + \mu_{23} + \mu_{34} < 1 + \mu_{24}$$
$$+ \quad f^3: \quad 2 + \mu_{31} + \mu_{14} < 1 + \mu_{34}$$

$$6 + \mu(Z) + (\mu_{14} + \mu_{24} + \mu_{34}) < 3 + (\mu_{14} + \mu_{24} + \mu_{34})$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3 + \underbrace{\mu(Z)}_{\geq 0} < 0$$

$\Rightarrow \nexists\, \mu \geq 0$, dass das erfüllt $\square$

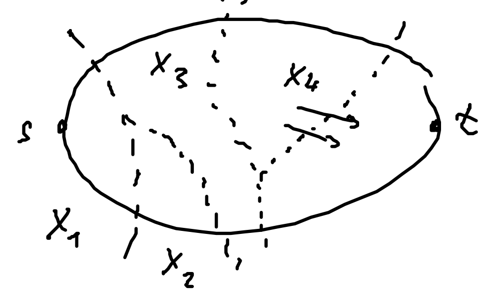
Offene Frage: Wie sieht genaue Charakterisierung aus?

zurück zu dynamischen s,t Flüssen mit konstanten Fahrzeiten

**6.1 LEMMA:** Für jeden dyn. s,t-Fluss $f$ und jeden dyn. s,t-Schnitt $\mathcal{C}$ zum selben Zeithorizont $T$ gilt:

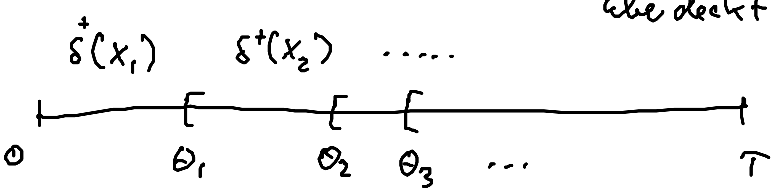
$$\text{value}(f) \leq \text{cap}(\mathcal{C})$$

Beweis: Betrachte Folge $X_1, X_2, \dots, X_k$ der Knotenmengen in $\mathcal{C}$




Jede Menge $X_i$ erzeugt Kantenmenge $\delta^+(X_i)$

Das Zeitintervall $[0,T[$ wird durch die "Gültigkeit" der $\delta^+(X_i)$ überdeckt

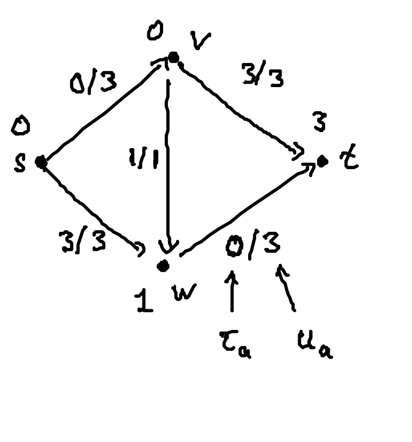


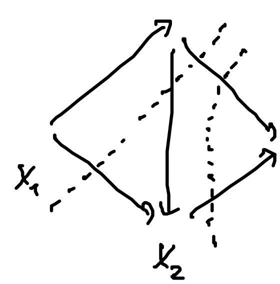

d.h. $\Theta_i = \min\{\pi(w) \mid (v,w) \in \delta^+(X_i)\}$

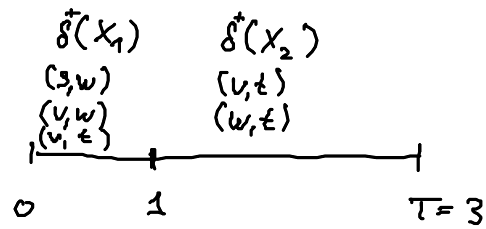
$\Rightarrow$ value$(f) \leq \sum_i$ Flussmenge über Kanten in $\delta^+(X_i)$, die im Zeitintervall $[\Theta_{i-1}, \Theta_i[$ fließen kann

$$\leq \sum_{\substack{a \in A \\ a=(v,w)}} \max\{\pi(w) - \pi(v) - \tau_a, 0\} \cdot u_a = \text{cap}(\mathcal{C}) \quad \square$$

<u>Bsp:</u>



| | | | |
|---|---|---|---|
| $(s,v)$: | $\pi(v) - \pi(s) - \tau_a = 0 - 0 - 0$ | $\rightarrow$ kein Beitrag | |
| $(s,w)$: | $1 - 0 - 3 < 0$ | kein Beitrag | |
| $(v,w)$ | $1 - 0 - 1 = 0$ | " | |
| $(v,t)$ | $3 - 0 - 3 = 0$ | " | |
| $(w,t)$ | $3 - 1 - 0 = \underbrace{2}_{\text{Zeitspanne}}$ | $2 \cdot u_a = 2 \cdot 3 = \underbrace{6}_{cap(\mathcal{C})}$ | |

zum Beweis der Optimalität des zeitlich wh. Flusses $f$ (aus Algo von Ford-Fulkerson) unter allen dyn. Flüssen konstruiert man aus $f$ einen dyn. $s,t$-Schnitt $\mathcal{C}$ mit $value(f) = cap(\mathcal{C})$.

<u>Konstruktion von $\varphi$:</u>

Setze $\pi(v) :=$ Länge eines kürzesten Weges von $s$ nach $v$ im Residualgraph $(G + (t,s))_x = \bar{G}_x$ [$x$ = statisch optimaler Fluss] bzgl. der $\tau_a$ und $-T$

Dies definiert dyn. $s,t$ Schnitt $\mathcal{C}$, denn:

$\pi(s) = 0$ ($x$ min cost flow $\Rightarrow$ $\bar{G}_x$ hat keine Zykel negativer Länge)

$\pi(t) \geq T$ ($< T$ $\Rightarrow$ negative Zykel)

Es gilt sogar: $\pi(t) = T$ (da Kante $(s,t) \in \bar{G}_x$)

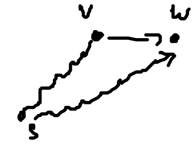
$\boxed{value(f) = cap(\mathcal{C})}$:

Betrachte Kante $a = (v,w)$

Claim 1: $\boxed{[\pi(v), \pi(w) - \tau_a[ \neq \emptyset \Rightarrow x_a = u_a, \; f_a(\theta) = u_a \quad \forall \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[}$

Beweis: a) Ann. $x_a < u_a$

$\Rightarrow (v,w) \in \bar{G}_x \Rightarrow \pi(w) \leq \pi(v) + \tau_a \Rightarrow$ Intervall ist $\emptyset$




b) Ann. $\exists\, \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$ mit $f_a(\theta) < u_a \; (= x_a)$

$\Rightarrow$ $\exists$ Weg $P_0$ in Pfadzerlegung zu $x$ mit $a \in P_0$ und

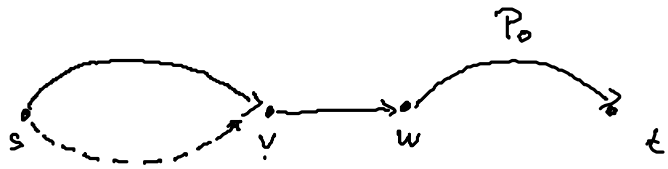
(i) der erste Fluss entlang $P_0$ in $f$ kommt in $v$ vor der Zeit $\pi(v)$ an

[wenn auf allen $\overset{P}{\text{Wegen}}$ durch $a$ der Fluss $f_P$ in $v$ bereits zu $\pi(v)$ ankommt, gilt $f_a(\pi(v)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a$]

oder

(ii) der letzte Fluss durch $P_0$ verlässt $w$ vor $\pi(w)$

zu (i)



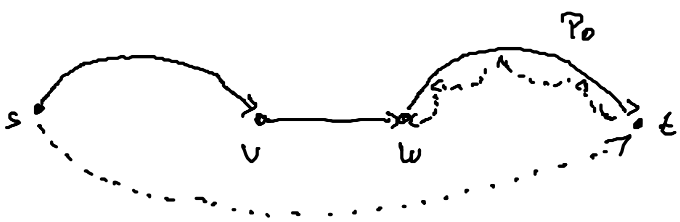

$\overset{P}{\text{Weg}}$ in $\bar{G}_x$ mit Länge $\pi(v)$, exist nach Def von $\pi(v)$

$\Rightarrow$ dieser Weg hat noch Restkapazität

$\Rightarrow$ $P_0[v,s] + P[s,v]$ ist Zykel negativer Länge in $\bar{G}_x$

Rückwärtskanten exist., da entlang $P_0$ Fluss fließt

zu (ii)




$\underbrace{\text{kürzeste Weg}}_{P}$ in $\bar{G}_x$ von s nach t

Betrachte $P + P_0[t,w]$ (Weg in $\bar{G}_x$)

Fluss entlang $P_0$ verlässt $w$ vor $\pi(w)$

$\Rightarrow$ $\pi(w) + \tau(P_0[v,t]) > T = \pi(t)$ $(*)$

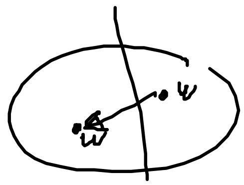
da man bis zum letzten Moment in $f$ entlang $P_0$ schickt

$P + P_0[t,w]$ hat Länge $\pi(t) - \tau(P_0[w,t]) \overset{(*)}{<} \pi(w)$
Widerspruch zu Def von $\pi(w)$

Claim 2: $\boxed{[\pi(w) - \tau_a, \pi(v)[ \neq \emptyset \Rightarrow x_a = 0 \quad f_a(\theta) = 0 \ \forall \theta}$

Beweis: falls $x_a > 0 \Rightarrow (w,v) \in \bar{G}_x \Rightarrow \pi(v) \leq \pi(w) - \tau_a$
$\Rightarrow$ Intervall ist leer, Widerspruch □

Claim 2 $\Rightarrow$ f kreuzt keinen Schnitt über Rückwärtskanten




$\Rightarrow$ nur auf Vorwärtskanten
$\Rightarrow$ (Claim 1) $\quad f_a(\theta) = u_a \quad \forall \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$

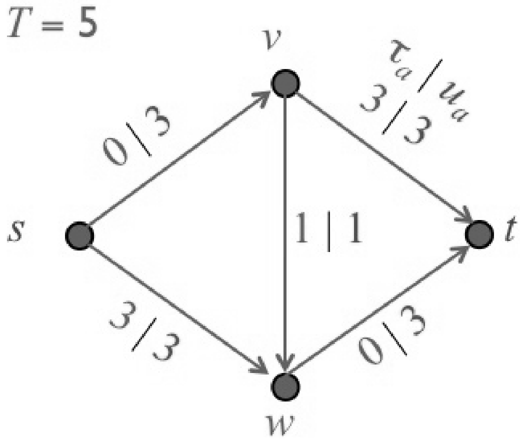
$\Rightarrow$ value(f) = cap($\varphi$) □

**5.2 SATZ:** (Ford - Fulkerson 58):

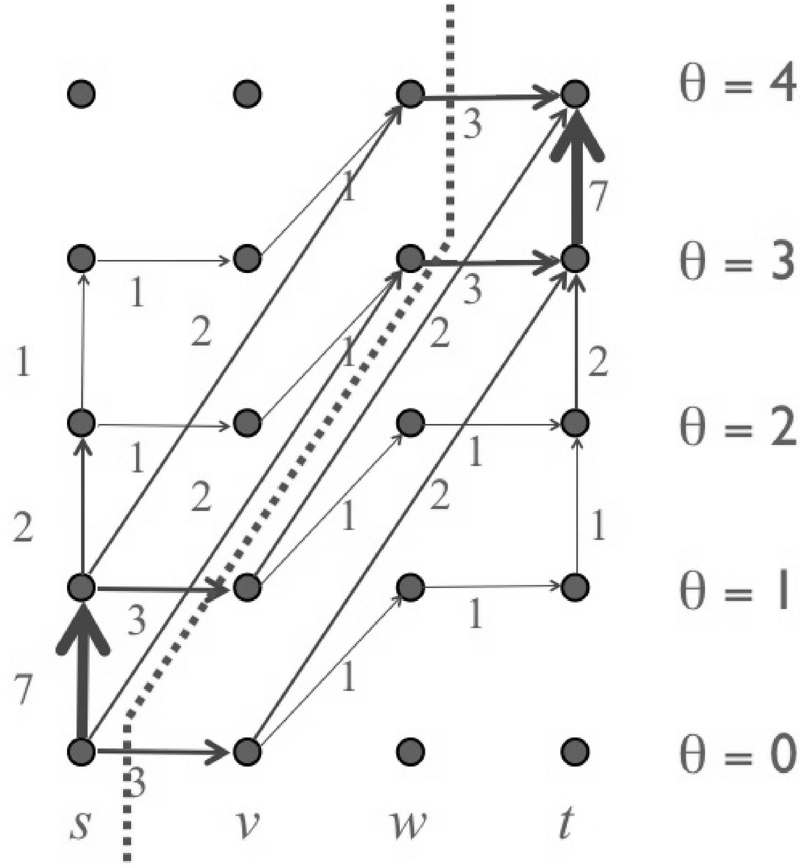
(1) Der Algo konstruiert einen opt. dyn. Fluss zum Zeithorizont T

(2) Die Laufzeit wird dominiert durch die Berechnung des statischen min cost Flusses x

(3) Der so konstruierte opt. dyn Fluss f ist zeitlich wiederholt und kommt ohne Speicherung in Knoten aus.




$|f| = 12$




alternative Beweis für Optimalität (über Dualitätstheorie)

Min Cost Flow Problem als LP (P)

Duales formulieren (D)

zeigen, dass value$(f) \geq$ OPT$(P)$

value$(f) \leq$ OPT$(D)$

$\boxed{\text{AUFGABE}}$