Maximales dynamisches s,t-Fluss Problem

Gegeben: Digraph $G=(V,A)$, $s,t \in V$, u_a, τ_a, T

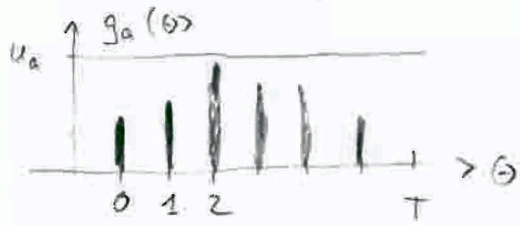
Gesucht: dynamischer s,t-Fluss f Zeithorizont T und maximalem Flusswert value(f)

Diskrete versus stetige Zeit:

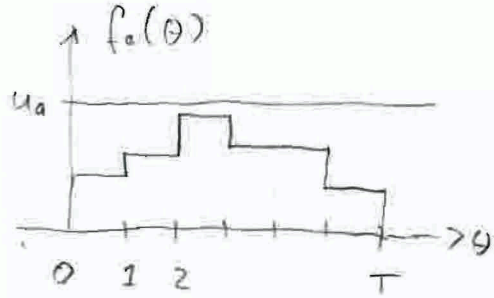
bisherige Definition nutzt stetige Zeit

diskrete Zeit $\hat{=}$ sende Fluss nur zu Zeitpkt. $0, 1, 2,$

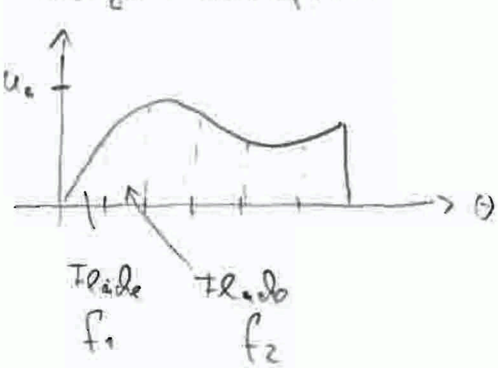
diskreter Fluss g



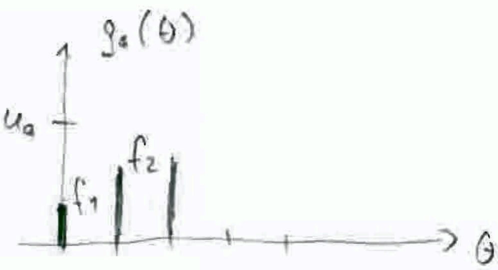
$\xrightarrow{\text{Transformation}}$ in stetigen Fluss



stetiger Fluss $f_a(\theta)$



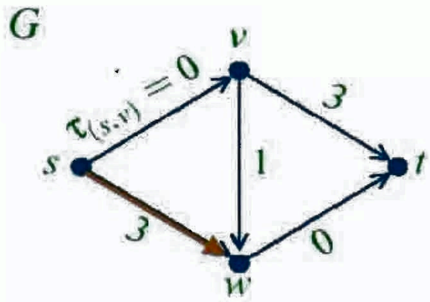
$\xrightarrow{\text{Transformation}}$ in diskreten Fluss



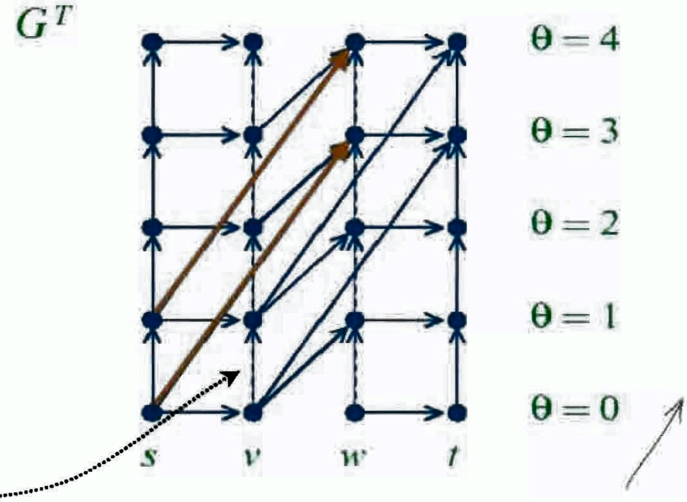
Beobachtung: Bei hinreichend feiner Diskretisierung der Zeit kann jeder diskrete dynamische Fluss als stetiger dynamischer Fluss interpretiert werden und umgekehrt (genau bis auf beliebig kleinen Approximationsfehler bei "vernünftigen" f_a)

Time expanded networks

Observation. Discrete flows over time in G correspond to static flows in time-expanded networks G^T (for constant τ_a)



Example: $T = 5$.

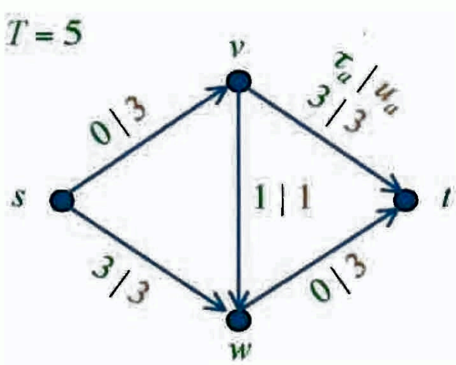


waiting in a node

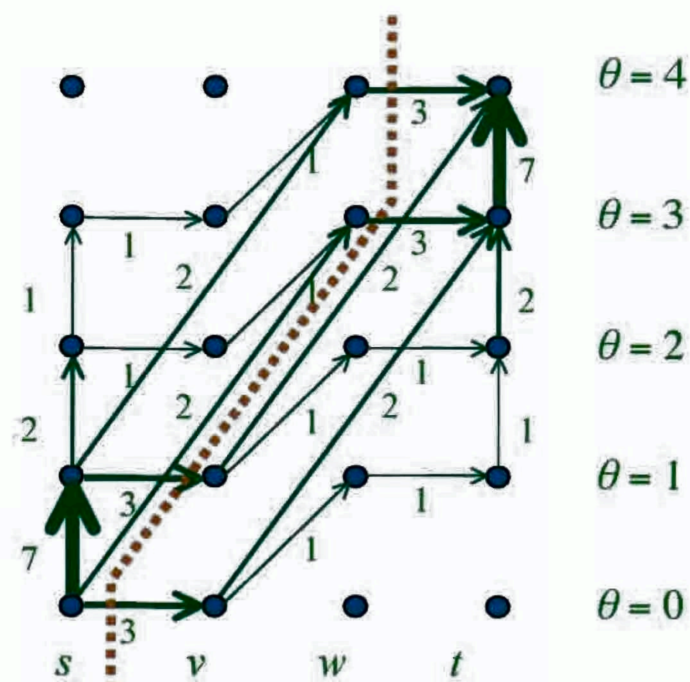
Kopie v. G für jede Zeitschicht

Kanten zwischen verschiedenen Zeitschichten entsprechend τ_a

A static flow in the time expanded network



$|f| = 12$



min Schnitt = max value dyn. Fluss

Vorteil diskreter dynamischer Flüsse: Beschreibung über zeitexpandierte Netze möglich]

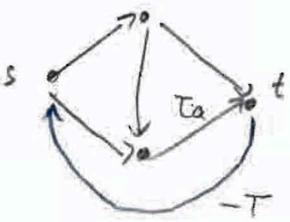
$\Downarrow$

- max s,t-dynamischer Fluss mit Zeithorizont T
  $\hat{=}$ max s,t-statischen Fluss in G^T
- statische Flusstheorie im Prinzip anwendbar (z.B. max Fluss - min Cut)
- ABER G^T riesig bei feiner Zeitskala
  in G^T polynomiale Algorithmen sind bzgl G
  nur pseudopolynomial

<u>Der Algorithmus von Ford-Fulkerson für max dyn. s,t-Flüsse [1958]</u>

Grobe Idee:

1) Berechne statischen min-cost Fluss x in $G+(t,s) =: \bar{G}$



d.h. Zielfkt $\sum_{a \in A} \tau_a x_a - T \cdot \mathrm{value}(x)$

$\hat{=}$ min-cost Zirkulation, da alle Balancen $b(v) = 0$

[geht in polynomialer Zeit mit Methoden aus ADM I]

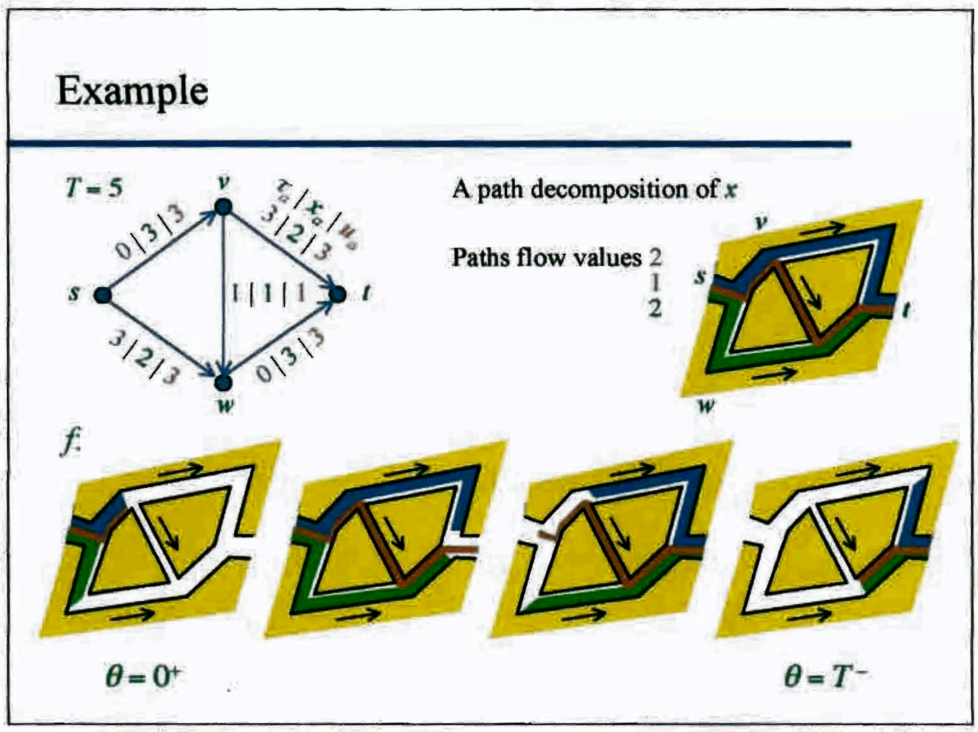
2) Wähle beliebige Pfaddekomposition $\mathcal{P} \subseteq \{s,t \text{ Wege}\}$
von x bzgl. G mit x_P = Fluss entlang $P \in \mathcal{P}$
[Standardzerlegung aus ADM I von x in $G+(t,s)$
ergibt gerichtete Kreise, nehme nur die, die (t,s) enthalten,
diese definieren s,t Wege ; möglich in polynomialer Zeit, ADM I]

3) Nutze die Pfade zur Konstruktion eines <u>zeitlich wiederholten Flusses</u> f:

f schickt Fluss mit der konstanten Rate x_P entlang P

im gesamten Intervall $[0, T-\tau_P]$

letzter Zeitpunkt zum Senden bei s, so dass Fluss spätestens zur Zeit T in Senke t ankommt



4) Dies ergibt einen dynamischen s,t-Fluss f mit Zeithorizont T

Die Flussraten $f_e : [0, T[\to \mathbb{R}$ ergeben sich polynomiell aus den maximal m Wegraten f_P und Zeiten τ_a

Jede Flussrate ist eine stückweise konstante Fkt mit maximal $2m$ Sprüngen.

$\Rightarrow$ alle Flussraten haben Outputgröße polynomiell in der Inputgröße und können in polyn. Zeit konstruiert (werden)

Zulässigkeit des zeitlich wiederholten Flusses f

- Flusserhaltung trivial., f erfüllt sie mit "=",
  d.h. keine Speicherung von Fluss in Knoten

- Kapazitätserhaltung:

$$f_a(\theta) \le \sum_{P:\, a \in P} x_P = x_a \le u_a$$

- Nach Zeit T ist das Netzwerk leer, da auf P der letzte Fluss zur Zeit $T - \tau_P$ geschickt wird

Wert des zeitlich wiederholten Flusses f

$$\text{value}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} (T - \tau_P)\, x_P = T \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_P x_P$$

$$= T\, \text{value}(x) - \sum_{P \in \mathcal{P}} \Big(\sum_{a \in P} \tau_a \Big) x_P$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \Big(\sum_{P \ni a} x_P \Big) \tau_a$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a$$

$=$ negative der Zielfunktion $\sum_{a \in A} \tau_a x_a - T\, \text{value}(x)$

für das min-cost-Zirkulationsproblem

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$f$ maximiert den Flusswert über alle zeitlich wiederholten dynamischen s,t-Flüsse mit Zeithorizont T}}$

Insbesondere ist $\tau_P \le T \quad \forall P$, sonst ist $P + (t,s)$ Zykel mit positiven Kosten

Optimalität:

Gilt max-flow min-cut auch im dynamischen Fall

Def. dynamischer s,t-Schnitt mit Zeithorizont T

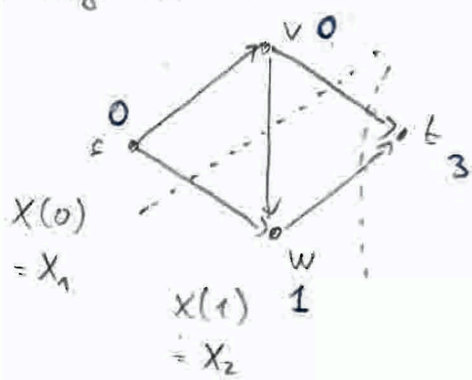
ist gegeben durch Werte $\pi(v) \in [0,\infty[$ für $v \in V$ mit $\pi(s)=0$, $\pi(t) \geq T$

Diese Werte definieren eine aufsteigende Folge $\mathcal{C}$ von Mengen

$$X(\theta) := \{ v \in V \mid \pi(v) \leq \theta \}$$

so dass für $\theta \in [0,T[$ $\quad X(\theta), V - X(\theta)$ einen s,t Schnitt definiert

Die Folge hat nur endlich viele verschiedene Mengen $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_k$



$\pi(s) = 0$
$\pi(v) = 0$
$\pi(w) = 1$
$\pi(t) = 3 = T$

Die Kapazität eines solchen Schnittes $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$\operatorname{cap}(\mathcal{C}) := \sum_{\substack{a \in A \\ a=(v,w)}} \underbrace{\max\{ \underbrace{\pi(w) - \pi(v)}_{\text{Zeit, die } a \text{ im dyn. Schnitt ist}} - \tau_a, 0 \}}_{\text{maximale Zeitspanne mit der Fluss aus Kante } a \text{ rausfließen könnte, während } a \text{ im Schnitt ist}} \cdot \underbrace{u_a}_{\text{Schranke für die Flussrate}}$$