5.3 Das MTB-Problem (Minimum Toll Booth) mit Gewichten

d.h. Zielfkt ist $\sum_a w_a z_a$

Gewicht, 0,1 Variable

mit $z_a = \begin{cases} 1 & \mu_a > 0 \\ 0 & \mu_a = 0 \end{cases}$

IP Nebenbed:

$\delta_v^k - \delta_u^k \leq \tau_a^f + \mu_a \quad \forall\, a=(u,v)$ inaktiv, $\forall k$

$\delta_v^k - \delta_u = \tau_a^f + \mu_a \quad$ ... aktiv ...

$\tau_a \leq M z_a \quad \forall a$ ($M > 0$ geeignete Konstante)

δ_v^k beliebig

$\mu_a \geq 0$

$z_a \in \{0,1\}$

Big M - Formulierung

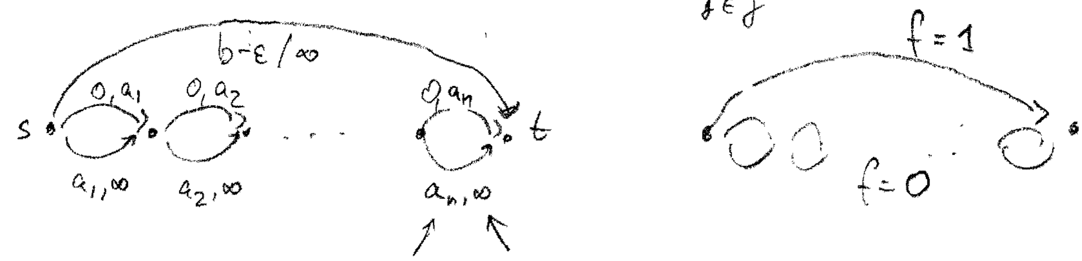
5.7 SATZ: Das gewichtete MTB-Problem ist (schwach) NP schwer

Beweis: Reduktion von PARTITION:

Gegeben: $a_1 \ldots a_n$ mit $\sum a_i = 2b$

Frage: $\exists?\ J \subseteq \{1,..,n\}$ mit $\sum_{j \in J} a_j = b$

Graph:

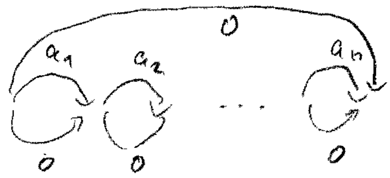


Fahrzeit, Gewichte, $\varepsilon < \min_i a_i$

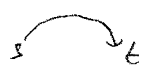
Zeige: I JA-Instanz von PARTITION $\Leftrightarrow \exists\, \mu \in M(f)$ mit $w(\mu) \leq b$

Sei I JA-Instanz zu PARTITION

Definiere dazu Maut Vektor μ als



$\Rightarrow$ beide Kanten  haben gleiche Kosten

$\Rightarrow$ alle s,t Wege haben eine Länge $\geq b$
und  hat Länge b

$\Rightarrow$ f wird von μ erzwungen

Umkehrung:

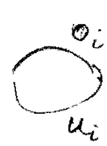
Sei μ ein zulässiger Mautvektor. Zeige: $w(\mu) \geq b$

Endliches Gewicht wird nur für obere Kanten in  erreicht

Sei A^{ob} die Menge der oberen Kanten mit $\mu_a > 0$

Falls $\sum_{a \in A_{ob}} \mu_a < b$ $\Rightarrow$ oberer Weg hat Kosten $< b$
$\Rightarrow$ μ nicht zulässig für f

$\Rightarrow$ $\sum_{a \in A^{ob}} \mu_a \geq b$

Sei  ein paralleles Paar mit $\mu_{o_i} > 0$

Falls $\mu_{o_i} > \mu_{u_i}$ $\Rightarrow$ wird u_i statt o_i wählen
$\Rightarrow$ Maut kann verringert werden

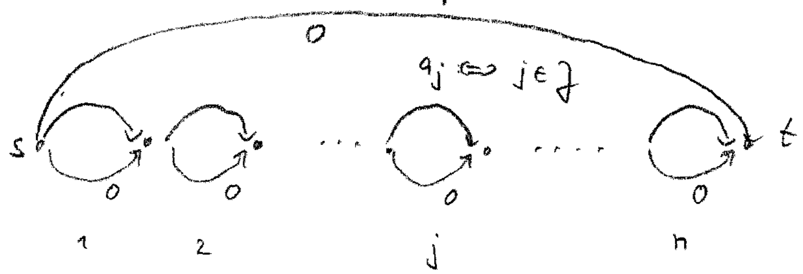
$\Rightarrow$ im Optimum gilt $\mu_{o_i} > 0$ $\Rightarrow$ $\mu_{o_i} = a_i$

"$\Rightarrow$"

Sei I eine JA-Instanz von PARTITION mit Indexmenge J,

also $\sum_{j\in J} a_j = b$.

Definiere dazu den Kantvektor μ als



d.h. $\mu(\text{obere Kante in Parallelenpaar } j) := \begin{cases} a_j & j \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und $\mu \equiv 0$ sonst

$$\Rightarrow \quad w(\mu) = \sum_{j\in J} w_j \underset{\text{Konstruktion}}{=} \sum_{j \in J} a_j = b$$

μ erzwingt f, denn  hat Länge $b-\varepsilon$

 hat Länge b

Ersetzen von oberen Kanten durch die unteren Kanten verlängert höchstens den Weg

$\Rightarrow$ μ erzwingt f und hat Gewicht $w(\mu) \le b$

"$\Leftarrow$" Sei $\mu \in M(f)$ mit $w(\mu) \le b$

Konstruktion $\Rightarrow$ $\mu_a > 0$ kann nur auf oberen Kanten

in  sein

(andere Kanten haben Gewicht ∞)

Beh.: $w(\mu) = b$

denn: Ann. $w(\mu) < b$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{a:\,\mu_a > 0} w_a \underset{\uparrow}{=} \sum_{j \in J} a_j$$

Konstruktion

mit J = zugehörige Indexmenge der Parallelenpaare in denen $\mu_a > 0$

$\Rightarrow$ Weg $\curvearrowright\curvearrowright\dots\curvearrowright$ hat Länge $\sum_{j \in J} a_j < b$

$\Rightarrow$ $\mu \notin M(f)$

Also: $w(\mu) = b$ und $\sum_{j \in J} a_j = b$

$\Rightarrow$ I ist JA-Instanz von Partition $\square$

Problem MTB hat starke Verwandschaft mit

MIN LENGTH BOUNDED CUT

Gegeben: Digraph $D = (V, A)$
Kantenlängen l_a, Längenschranke L
Kapazitäten u_a
Knoten s, t

Gesucht Schnitt $C \subseteq A$ (als Kantenmenge)

so dass

$(V, A-C)$ keine s,t-Wege der Länge $\leq L$ enthält

C minimale Kapazität $u(C) := \sum_{a \in C} u_a$ hat

length bounded cut

5.8 SATZ [Baier et al 06] Für $\varepsilon > 0$ und $L \in \{4, \ldots, \lfloor n^{1-\varepsilon} \rfloor\}$ ist es NP-schwer das MIN L-BOUNDED CUT Problem mit $l_a \equiv 1$, $u_a \equiv 1$ besser als 1.1377 zu approximieren

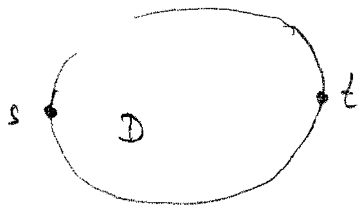
(ohne Beweis $\square$

$\boxed{\text{5.9 SATZ: MIN-L-BOUNDED CUT und single arc MTB sind polynomial äquivalent und gleichen Zielfunktionswert}}$

Fluss nur auf eine Kante

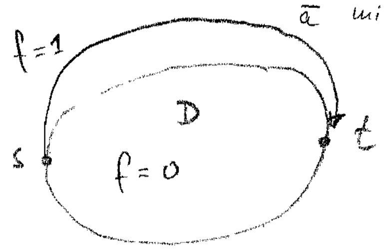
Beweis: Transformation MIN L-BOUNDED CUT → MTB:

Sei I Instanz von MIN-L-BOUNDED CUT



u, ℓ, L gzz

→



$\bar{a}$ mit $\tau_{\bar{a}} := L+\varepsilon$

$w_{\bar{a}} := 1$

$\tau := \ell \quad w := u$

ε so klein dass
alle $L+\varepsilon$ längenbeschränkten Wege in D
bereits L-längenbeschränkt sind

Sei C ein L-bounded Schnitt für I

$\Rightarrow \mu_a := \begin{cases} M \text{ groß} & \text{falls } a \in C \\ 0 & \text{falls } a \notin C \end{cases}$ ist Kantvektor mit $w(\mu) = u(C)$

und μ erzwingt f

Für jeden zulässigen Kantvektor μ für f gilt

$\{a \in A \mid \mu_a > 0\}$ ist ein L-bounded Schnitt

$\Rightarrow w(\mu) \geq u(C)$

Umgekehrte Transformation $\boxed{\text{AUFGABE!}}$

II. Dynamische Flüsse

§6 Dynamische s,t Flüsse mit konstanten Fahrzeiten

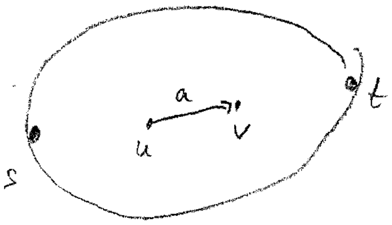
bisher: Rush Hour = statischer Fluss

d.h. in einem Zeitraum auf ganzem Weg P konstante Flussrate f_P

Modell nicht mehr zutreffend außerhalb der Rush hour

$\Rightarrow$ müssen zeitliches Verhalten des Flusses mit modellieren
wichtig auch für logistische Anwendungen

6.1 Maximale s,t Flüsse bei konstanten Fahrzeiten



Kante a hat Kapazität $u_a \in \mathbb{N}$

Zeit $\tau_a \in \mathbb{N}$

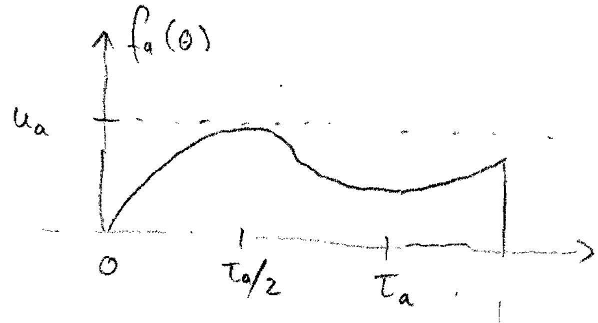
benötigt zum Durchqueren der Kante

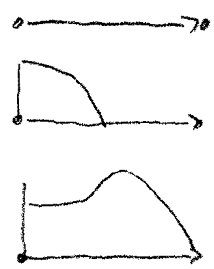
zusätzlich Zeithorizont T gegeben

Dynamischer Fluss f mit Zeithorizont T

= Funktionen $\underbrace{f_a : [0, T[\to \mathbb{R}^1_+}$ für alle Kanten $a \in A$

$f_a(\theta)$ = Flussrate in Kante a zum Zeitpkt θ





$\theta = 0$

$\theta = \frac{\tau_a}{2}$

$\theta = \tau_a$

$\longrightarrow$ "umgekehrtes Bild" auf Kante zur Zeit $\Theta \geq \tau_a$ kommt $f_a(\Theta - \tau_a)$ am Kopf der Kante an

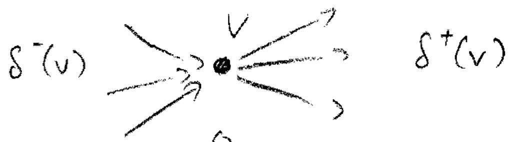
Ein <u>dynamischer Fluss mit Zeithorizont T</u> erfüllt

(1) die Kapazitätsbedingungen:

$$f_a(\Theta) \leq u_a \quad \forall\, \Theta \in [0,T[$$

Kapazitäten beschränken die Flussrate

(2) Flusserhaltungsgleichungen (kein Defizit an Knoten gestattet)



$$\underbrace{\sum_{a \in \delta^-(v)} \int_{\tau_a}^{\Theta} f_a(\xi - \tau_a)\, d\xi}_{\text{Einfluss bis } \Theta} \geq \underbrace{\sum_{a \in \delta^+(v)} \int_{0}^{\Theta} f_a(\xi)\, d\xi}_{\text{Ausfluss bis } \Theta} \quad \forall\, \Theta$$

"$\geq$" $\hat{=}$ Warten in Knoten erlaubt

"$=$" $\hat{=}$ kein Warten erlaubt

(3) "$=$" muss gelten zum Zeitpkt T

und $f_a(\Theta) = 0$ für $\Theta > T - \tau_a$ (Fluss hat Netzwerk verlassen nach Zeit T)

Wert des zulässigen Flusses f:

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} \int_0^T f_a(\Theta)\, d\Theta - \sum_{a \in \delta^-(s)} \int_{\tau_a}^{T} f_a(\Theta - \tau_a)\, d\Theta$$

$$= -\sum_{a \in \delta^+(t)} \int_0^T f_a(\Theta)\, d\Theta + \sum_{a \in \delta^-(t)} \int_{\tau_a}^{T} f_a(\Theta - \tau_a)\, d\Theta$$

= Nettoausfluss aus s = Nettoeinfluss in t