§5 Verkehrslenkung mit Mautgebühren

Geg. Fluss f, gibt es einen Mautvektor $\mu = (\mu_a)_{a \in A}$ so dass das UE bzgl. $\tau_a(x_a) + \mu_a$ gerade f ist

$\boxed{\mu \text{ erzwingt } f}$

5.3 SATZ: Sei f zul. Fluss $f = \sum_{k \in C} f^k$ und sei $\mu \geq 0$ ein Mautvektor

Dann sind äquivalent

(1) μ erzwingt f

(2) zu jeder commodity k exist. Knotenpotenzial δ^k mit

$$\delta_v^k - \delta_u^k \leq \tau_a^f + \mu_a \quad \forall a = (u,v) \in A \setminus \bar{A}_k \qquad (5.1)$$

$$\bar{A}_k = \{a \in A \mid f_a^k > 0\}$$

$$\delta_v^k - \delta_u^k = \tau_a^f + \mu_a \quad \forall a = (u,v) \in \bar{A}_k \qquad (5.2)$$

lineare Nebenbed. an μ_a, δ^k

$\Rightarrow$ Menge $M(f) := \{\mu \geq 0 \mid \mu \text{ erzwingt } f\}$ ist ein Polyeder (möglicherweise $\emptyset$)

$M(f)$ wird durch polyn. viele Ungleich. beschrieben

5.4 LEMMA: Sei $f = \sum_k f^k$ ein zul. Fluss. Dann gilt:
$M(f) = \emptyset$ falls $\exists k$ mit: der von $\bar{A}_k$ erzeugte Teilgraph hat einen Zykel positiver Länge bzgl. τ_a^f

Beweis: Sei $Z = v_0, v_1, \ldots, v_\ell = v_0$ ein (gerichteter) Zykel mit pos. Länge

Ein Mautvektor $\mu \geq 0$ muss auf $\bar{A}_k$ (5.2) erfüllen d.h. $\exists$ Potenzial δ^k mit

$$\tau^f(v_i,v_{i+1}) + \mu(v_i,v_{i+1}) = \delta^k_{v_{i+1}} - \delta^k_{v_i}$$

$\sum$ entlang Zyklel

$$\underbrace{\tau^f(Z)}_{>0} + \underbrace{\mu(Z)}_{\geq 0} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{0}$$

(Summe der Potenzialdiff entlang Zyklel ist 0

$\Rightarrow \mu(Z) < 0$ Widerspruch zu $\mu \geq 0$ $\square$

$M(f)$ ist Polyeder $\Rightarrow$ möglicherweise exist. viele Mautvektoren für f

$\Rightarrow$ man kann "Mautoptimierung" durchführen

$$\min z(\mu)$$
$$\text{so dass } \mu \in M(f)$$

<u>Beispiele:</u>

MCT min convex toll problem : z konvexe

- MTT min total toll problem : $z(\mu) := \sum_{a\in A} \mu_a$

  $\hat{=}$ Info, die Navigationsdienst an Navis übertragen muss um bestimmte Flussmuster zu erzeugen (z.B. für weiträumige Umfahrungen) und daher mehrere Wege zuzulassen

  "Verkehrsspreizung"

MRT min revenue toll problem $z(\mu) := \sum_{a\in A} f_a \cdot \mu_a$

"Schone die Autofahrer"

- MTB min toll booth problem $z(\mu) := \text{support}(\mu)$
$= \# \{ a \in A \mid \mu_a > 0 \}$

$\hat{=}$ min # von Erfassungsgeräten
z.B. für elektronische Mauterfassung

5.2 Das MTT Problem mit heterogenen Nutzern

bisher homogen: Kosten $c_a(x_a) = \tau_a(x_a) + \tau_a$

heterogen: Einteilung in Commodities $\hat{=}$ Nutzerklassen
mehrere Klassen mit gleichem s_k, t_k zulassen

Nutzerklasse k hat Kosten $c_a(x_a) = \tau_a(x_a) + \gamma_k \mu_a$

$\gamma_k > 0$, bisher $\gamma_k = 1 \ \forall k$, $\gamma_k < 1 \Rightarrow$ Zeit ist wichtiger

Bedingungen aus Satz 5.3 werden dann

$\mu \geq 0$ erzwingt f bzgl der γ_k

$\Leftrightarrow \forall k \ \exists \ \delta^k$ mit

$$\delta_v^k - \delta_u^k \leq \tau_a^f + \gamma_k \mu_a \qquad \forall a = (u,v) \in A \setminus \bar{A}_k \qquad (5.3)$$
$$= \qquad \forall a = (u,v) \in \bar{A}_k \qquad (5.4)$$

da Herleitung von Satz 5.3 pro commodity erfolgt

Das MTT Problem für heterogene Nutzer wird dann zu

$$(\text{MTT}) \qquad \min \sum_{a \in A} \mu_a$$
unter (5.3) (5.4) $\mu_a \geq 0$ δ_v^k bel.

Nenne Kanten $a \in \bar{A}_k$ <u>aktiv</u>, die anderen <u>inaktiv</u>

Betrachte zunächst nur eine Commodity, lasse Index k weg

(MTT) wird zu

$$\min \sum_{a \in A} \mu_a$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{unter} & \delta_v - \delta_u \le \tau_a^f + \gamma \mu_a & \forall\, a=(u,v) & \text{inaktiv} \\
& \delta_v - \delta_u = \tau_a^f + \gamma \mu_a & \ldots\ldots & \text{aktiv} \\
& \mu_a \ge 0 & \forall\, a & \\
& \delta_v \ \text{bel.} & \forall\, v &
\end{array}
$$

Matrixschreibweise mit Kanten-Knoten-Inzidenzmatrix (ADM I)

$$N = \begin{pmatrix} N_{in} \\ N_{ak} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{inaktiv} \\ \leftarrow \text{aktiv} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ (u,v) & \left[\begin{array}{cc} -1 & +1 \\ & \end{array}\right] \end{array}$$

I Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(MTT)

$$\min \mathbb{1}^T \cdot \mu = \max -\mathbb{1}^T \cdot \mu$$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{unter} & N_{in}\,\delta - I_{in}\,\gamma\,\mu \le \tau^f_{in} & & y_{in} & \\
& N_{ak}\,\delta - I_{ak}\,\gamma\,\mu = \tau^f_{ak} & & y_{ak} & y = \begin{pmatrix} y_{in} \\ y_{ak} \end{pmatrix} \\
& \mu \ge 0 \quad \delta \ \text{bel} & & &
\end{array}
$$

Das duale hierzu lautet:

$$\min (\tau^f_{in})^T \cdot y_{in} + (\tau^f_{ak})^T \cdot y_{ak} = (\tau^f)^T \cdot y$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{unter} & y_{in}^T N_{in} + y_{ak}^T N_{ak} = 0 & (\text{da } \delta \text{ bel}) \\
& -y_{in}^T I_{in}\,\gamma - y_{ak}^T I_{ak}\,\gamma \ge -\mathbb{1}^T & (\text{da } \mu \ge 0) \\
& y_{in} \ge 0 \quad y_{ak} \ \text{bel.} &
\end{array}
$$

also in Kantenform:

$$
(D)\quad \begin{cases}
\min \sum_{a \in A} \tau_a^f \, y_a \\[1em]
\text{unter } \sum_{a \in \delta^+(v)} y_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} y_a = 0 & \forall \text{ Knoten } v \\[1em]
y_a \leq 1/\gamma & \forall a \\[0.5em]
y_a \geq 0 & a \text{ inaktiv} \\
y_a \text{ bel} & a \text{ aktiv}
\end{cases}
$$

$\Rightarrow$ (D) ist ein Min-Cost-Zirkulationsproblem, in dem aktive Kanten beliebige negative Werte annehmen können

$\Rightarrow$ duale Zielfkt ist nach unten unbeschränkt, sobald $\bar{A}$ (aktive Kanten) einen Zykel mit positiven Kosten bzgl τ_a^f enthält

$\Rightarrow$ (Dualitätssatz) primale Zulässigkeitsbereich ist leer

Verallgemeinerung auf mehrere Commodities $\quad f = \sum_k f^k$

- haben im primalen die Bedingungen pro Commodity

$$\max \; -\mathbb{1}^T \cdot \mu$$

$$
\text{unter} \quad
\begin{pmatrix}
N^1 & 0 & & 0 & -I^1\gamma^1 \\
0 & N^2 & & 0 & -I^2\gamma^2 \\
 & & \ddots & & \\
0 & \dots & 0 & N^r & -I^r\gamma^r
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \delta^1 \\ \delta^2 \\ \vdots \\ \delta^r \\ \mu \end{pmatrix}
\leq
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} \tau^{f^1} \\ \vdots \\ \tau^{f^r} \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} y^1 \\ y^2 \\ \\ y^r \end{array}
$$

δ^k bel, $\mu \geq 0$

Dualvariable

bekomme hier in (D)

eine Kopplungsbedingung

$$\sum_{k=1}^{r} \gamma_k \cdot y_a^k \le -1$$

5.5 SATZ: Das duale MTT-Problem mit mehreren Commodities führt im homogenen Fall ($\gamma_k = 1$) zu einem Multi-Commodity-Zirkulationsproblem

$$\min \sum_k \sum_{a \in A_k} \tau_a^f \cdot y_a^k =: z(y)$$

$$\text{unter} \quad \sum_{a \in \delta^+(v)} y_a^k - \sum_{a \in \delta^-(v)} y_a^k = 0 \qquad \forall v, \forall k$$

$$\text{(Kopplung)} \qquad \sum_k y_a^k \le 1 \qquad \forall a \in A$$

$$y_a^k \ge 0 \qquad \forall a \text{ inaktiv}, \forall k$$

$$y_a^k \text{ bel} \qquad \forall a \text{ aktiv}, \forall k$$

Im heterogenen Fall wird die Kopplungsbed. zu

$$\longrightarrow \sum_k \gamma_k y_a^k \le 1 \qquad \forall a \in A$$

verlässt Flusstheorie

5.6 SATZ: Im heterogenen (und homogenen) Fall gilt für Fluss f

$$M(f) = \emptyset \iff \exists\, k \in C \text{ und Zykel } Z \text{ in } \bar{A}_k \text{ mit positiven Kosten bzgl } \tau_a^f$$

↑ unabh. von Zielfkt für Draut optimierung

Beweis: Betrachte eine Zielfkt wie beim MTT-Problem (beeinflusst nicht den Bereich $M(f)$)

$\Rightarrow$ das duale (D) hat die Form aus Satz 5.5

$\Rightarrow$ Zielfkt. von (D) ist nach unten unbeschränkt sobald ein $\bar{A}_k$ einen Zykel positiver Kosten bzgl τ_a^f enthält

$\Rightarrow M(f) = \emptyset$

Umgekehrte Richtung: (Betrachte wieder MTT)

$\left.\begin{array}{l}\text{Sei } M(f) = \emptyset \\ \text{Nullfluss ist zulässig in (D)}\end{array}\right\} \Rightarrow$ duale Zielfkt ist nach unten unbeschränkt

$\Rightarrow \exists$ Folge y^l von Zirkulationen mit $z(y^l) \to -\infty$ für $l \to \infty$

Flussdekompositionssatz ADM I

$\Rightarrow$ y^l ist zerlegbar in endlich viele Flüsse auf gerichteten elementaren Kreisen

$\Rightarrow$ einer dieser Zykel, etwa Z^l muss großen negativen Fluss haben (für l groß)

$\exists$ nur endlich viele elementare Zykel

$\Rightarrow$ in der Folge der Z^l tritt ein Zykel unendlich oft auf

$\Rightarrow$ Z kann (bei großem l) nur einen negativen Wert haben

alle Kanten von Z aktiv

$\Rightarrow$ $(\tau_a f \geq 0)$ Z ist Zykel in $\bar{A}_k$ mit pos. Kosten $\square$

Fazit:

- Haben einfaches Entscheidungskriterium für die Existenz eines Mautvektors zu f
- MTT Problem kann als LP gelöst werden
- Bei nur einer commodity gibt es auch kombinatorische Algorithmen

Idee: Löse das duale mit Min Cost-Fluss Algos
das ergibt optimale Lösung y von (D)
nutze y um (kombinatorisch) eine primal optimale
Lösung δ, μ zu konstruieren (kürzeste Wege Berechnungen)

AUFGABE

5.3 Das MTB Problem (Minimum Toll Booth) mit Gewichten

Zielfkt ist $\sum_a w_a z_a$ $\quad w_a > 0$

z_a ⟶ 0,1 Variable $\quad z_a = \begin{cases} 1 & \mu_a > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

IP - Nebenbedingungen:

$$\delta_v^k - \delta_u^k \le \tau_a^f + \mu_a \quad \forall\, a=(u,v) \text{ inaktiv } \forall k$$
$$= \quad \text{aktiv}$$

$$\mu_a \le M \cdot z_a \quad \forall a \qquad M > 0 \text{ geeignete Konstante}$$

$\mu_a \ge 0$
δ_v^k beliebig
$z_a \in \{0,1\}$

Big M Formulierung

5.7 SATZ: Das gewichtete MTB Problem ist (schwach) NP schwer