§5 Verkehrslenkung mit Mautgebühren

5.1 Grundlagen

§ 1,2 zeigen: SO ist UE bzgl. $c_a(x_a) = \underbrace{\tau_a(x_a)}_{\text{Fahrzeit}} + \underbrace{x_a\, \tau_a'(x_a)}_{\text{"Maut"}}$

bei homogenen Nutzern

$\Downarrow$

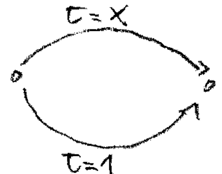
Frage: Gibt es feste Mautgebühren μ_a pro Kante a
so dass sich bzgl. $c_a(x_a) := \tau_a(x_a) + \mu_a$
ein SO Fluss f^* als UE bzgl. $c_a(x_a)$ einstellt?

Erweiterte Frage:

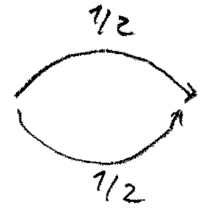
Gibt es zu beliebigem Fluss f feste Mautgebühren
μ_a pro Kante a, so dass ich bzgl. $c_a(x_a) := \tau_a(x_a) + \mu_a$
der Fluss f als UE bzgl. $c_a(x_a)$ einstellt?

Ist dies der Fall, so sagen wir, dass $\mu = (\mu_a)_{a \in A}$ den Fluss f
<u>nashifiziert</u> bzw. dass f (durch Maut) <u>erzwingbar</u> ist

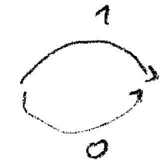
Beispiel: Pigou:



$\Rightarrow$ SO ist

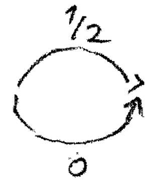


, UE ist



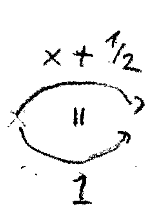
$d = 1$

Maut μ:



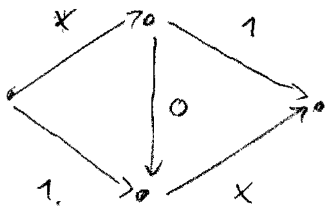
ergibt SO-Fluss

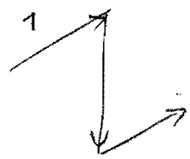
denn: UE bzgl. c_a $\Leftrightarrow$

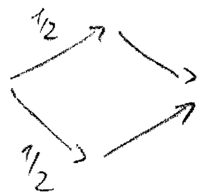


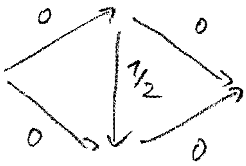
$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Bsp: Braess Paradox:

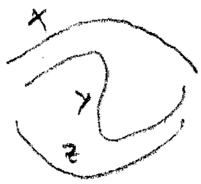
$d = 1$ 

UE 

SO 

Maut 

ergibt SO, denn:



müssen gleiche Fahrzeit erzielen

$$\Rightarrow \underset{①}{x+y+1} = \underset{②}{x+y+\tfrac{1}{2}+y+z} = \underset{③}{1+z+y}$$

① = ③ $\Rightarrow$ $z = x$

$x+y+z=1$ $\Rightarrow$ $y = 1-2x$ $\Rightarrow$ ② wird zu $2x + 2(1-2x) + \frac{1}{2}$

$= \frac{5}{2} - 4x$

① wird zu $x + 1 - 2x = 1 - x$

① = ② $\Rightarrow$ $4x - \frac{5}{2} = x - 1$ $\Rightarrow 3x = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $y = 0$

zeigt, dass SO nashifizierbar, aber neue Straße $\downarrow 0$ wird nicht benutzt.

5.1 LEMMA: Erlaubt man negative Zölle, so ist jeder Fluss f erzwingbar

Beweis: Setze $\mu_a := -\tau_a(x_a(f)) < 0$

$\Rightarrow$ alle Fluss führenden Wege bzgl f haben $c_P(f) = 0$.

Zeige: jeder andere s_k, t_k-Weg Q hat Kosten $c_Q(f) \geq 0$

$$c_Q(f) = \sum_{a \in Q} \left(\tau_a(x_a(f)) + \mu_a\right) = \sum_{a \in Q} \left(\tau_a(x_a(f)) - \tau_a(x_a(f))\right)$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ f ist UE bzgl der (negativen) Kantgebühren und alle Wege haben die Länge 0 □

Lemma zeigt, dass negative Kantgebühren nicht sinnvoll sind

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Beschränkung auf } \mu_a \geq 0}$ im Weiteren

5.2 LEMMA (Beckmann, McGuire, Winsten 56).
Das SO (jedes SO) ist erzwingbar mit Maut $\mu \geq 0$

Beweis: Sei f^* ein SO. Setze $\mu_a := \underbrace{f_a^*}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\tau_a'(f_a^*)}_{\geq 0}$ da $\tau_a \nearrow$

Betrachte UE f bzgl. $c_a(x_a) = \tau_a(x_a) + \mu_a$

$\Leftrightarrow$ Für alle $k \in C$, alle $P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$ gilt

$$\sum_{a \in P} c_a(f_a) \leq \sum_{a \in Q} c_a(f_a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{a \in P} \underbrace{\left(\tau_a(f_a) + f_a \cdot \tau_a'(f_a)\right)}_{\text{marginale Kosten}} \leq \sum_{a \in Q} \underbrace{\left(\tau_a(f_a) + f_a \cdot \tau_a'(f_a)\right)}$$

$\Leftrightarrow$ f ist ein SO, und $f_a = f_a^*$ falls τ_a streng monoton $\square$

Betrachte jetzt allgemeinere Frage wann ein Fluss f erzwingbar ist.

In Pfadformulierung:

f ist UE bzgl. $\tau_a(x_a) + \mu_a$

$\Leftrightarrow \forall k \in C \ \forall \ P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$

$$\tau_P(f) + \mu_P \leq \tau_Q(f) + \mu_Q \qquad \left(\mu_P = \sum_{a \in P} \mu_a\right)$$

$\Downarrow$

min $z(\mu)$ $\leftarrow$ Zielfkt für bzgl. der Kant

unter: $(\tau^f + \mu)^T(P) \leq (\tau^f + \mu)(Q) \quad \forall \ldots$

$\mu \geq 0$

skalare Größen da f fest

lineare Nebenbedingungen (Summe entlang P, Q)

nur exponentiell viele Nebenbedingungen

$\Downarrow$ Besser: Übergang zu Kantenformulierung

Dazu:

Sei f der gegebene Fluss mit Kantenwerten f_a und $\tau_a^f := \tau_a(f_a)$

Für $k \in C$ sei f_a^k der Fluss auf a bzgl. commodity k

und $\bar{A}_k := \{a \in A \mid f_a^k > 0\}$ $\quad [\hat{=} f_P > 0]$

Sei $\bar{A} := \bigcup_k \bar{A}_k$

5.3 SATZ: Sei $f = \sum_k f^k$ ein zulässiger Fluss und $\mu \geq 0$ ein Mautvektor

(1) f wird durch μ erzwungen, d.h. $\tau^f + \mu$ nashifiziert f

(2) Zu jeder commodity $k \in C$ exist. ein Potenzial $\delta^k : V \to \mathbb{R}$ mit

$$\delta_v^k - \delta_u^k \leq \tau_a^f + \mu_a \quad \forall\, a = (u,v) \in A \setminus \bar{A}_k \qquad (5.1)$$

$$\delta_v^k - \delta_u^k = \tau_a^f + \mu_a \quad \forall\, a = (u,v) \in \bar{A}_k \qquad (5.2)$$

Beweis: "$\Rightarrow$"

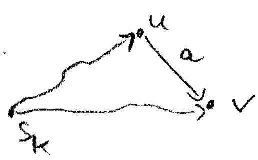
Sei $k \in C$ fest, beliebig

Sei $\delta_v^k :=$ Länge kürzester Weg von s_k nach v bzgl $\tau^f + \mu$

↳ wohldefiniert da $\tau_a^f + \mu_a = \underbrace{\tau_a(f_a)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu_a}_{\geq 0} \geq 0$

Δ-Ungleich. für kürzeste Wege (ADM I)

ergibt $\delta_v^k - \delta_u^k \leq \tau_a^f + \mu_a \quad \forall\, a = (u,v) \quad \Rightarrow (5.1)$



$f_a^k > 0 \Rightarrow$ a gehört zu Fluss-führendem Weg $P \in \mathcal{P}_k$

$\Rightarrow$ (f ist UE bzgl $\tau^f + \mu$) P ist kürzester Weg bzgl. $\tau^f + \mu$

$\Rightarrow$ a liegt auf kürzestem Weg bzgl. $\tau^f + \mu$

$\Rightarrow$ (5.2) gilt.

"$\Leftarrow$" Sei δ^k ein Potenzial, das bzgl. μ (5.1) und (5.2) erfüllt

können δ^k so anheben oder senken, dass $\delta^k_{s_k} = 0$

und (5.1), (5.2) weiter gelten

[Subtraktion von $\delta^k_{s_k}$ von allen δ^k_v]

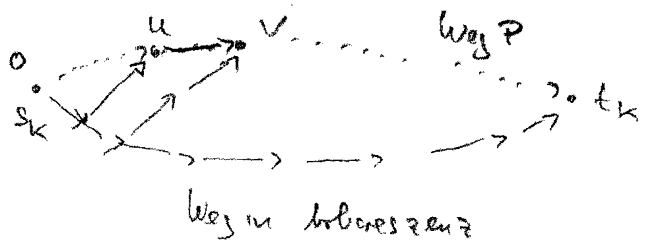
Betrachte den von $\bar{A}_k$ induzierten Teilgraph $\bar{D}_k$

$\Rightarrow$ auf allen Kanten von $\bar{D}_k$ gilt (5.2)

$\Rightarrow$ Δ Ungleich überall mit Gleichheit erfüllt

$\Rightarrow$ jede Arboreszenz von $\bar{D}_k$ mit Wurzel s_k ist kürzeste-Wege-Baum bzgl. $\tau f + \mu$ (ADM I, Satz 4.3)

und alle s_k, t_k-Wege haben dieselbe Länge



$\Rightarrow$ induktiv entlang P: $P[s_k, v]$ ist kürzeste s_k, v-Weg

denn: bereits für u gezeigt

$\Rightarrow$ $\delta^k_u + \tau f(u,v) + \mu(u,v) \overset{(5.2)}{=} \delta^k_v$

kürzeste Weglänge $\uparrow$ $\qquad$ $\uparrow$ kürzeste Weglänge in Arboreszenz

Für beliebige s_k, t_k-Wege Q erweitere die Arboreszenz zu kürzesten Wege-Baum im von $\mathcal{P}_k$ induzierten Graphen D_k und wende das obige Argument an $\Rightarrow$ (mit (5.1), (5.2))

$(\tau f + \mu)(Q[s_k, v]) \geq$ kürzeste Weglänge von s_k nach v

$\Rightarrow$ $(\tau f + \mu)(P) \leq (\tau f + \mu)(Q)$ für alle P, Q mit $f_P > 0$ $\square$