

4.4 Die Zwei-Schliff Methode von Heldmann & Ziegelmann [2000]

nutzt Weg-basierte IP-Formulierung und LP-Relaxation

0,1 Variable x_p für jeden st-Weg $\tau_p := \sum_{a \in p} \tau_a$, $l_p := \sum_{a \in p} l_a$

=> Primales IP:

$$\min \sum_p \tau_p x_p$$

$\leftarrow \tau_p$ minimieren

$$\text{unter } \sum_p l_p x_p \leq L$$

$\leftarrow$ Längenschränke eingehalten

$$\sum_p x_p = 1$$

$$x_p \in \{0,1\}$$

} $\leftarrow$ nur ein zulässiger Weg in Lösung

LP Relaxierung:

$$\min \sum_p \tau_p x_p$$

$$v \quad \text{unter } -\sum_p l_p x_p \geq -L$$

$$u: \quad \sum_p x_p = 1$$

$$x_p \geq 0$$

$\leftarrow x_p \leq 1$ tritt in Optimum automatisch ein, da $\tau_p \geq 0$

Duales LP:

$$\max u - Lv$$

$$\text{unter } u - l_p v \leq \tau_p \quad \forall p$$

$$v \geq 0, u \text{ nicht vorzeichen beschränkt}$$

Ersatzung $v \rightarrow -v$ ergibt

$$\max u + Lv$$

$$\text{unter } u + l_p v \leq \tau_p \quad \forall p$$

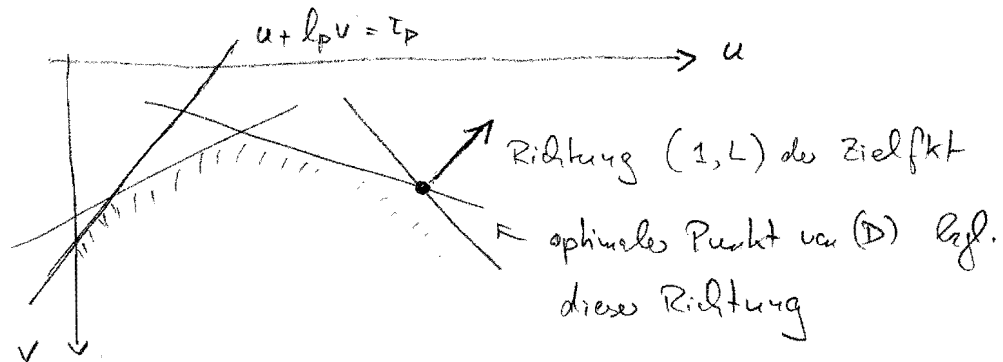
$$v \leq 0 \quad u \text{ nicht vorzeichen beschränkt}$$

(D)

Standardinterpretation von (D) als 2-dim LP

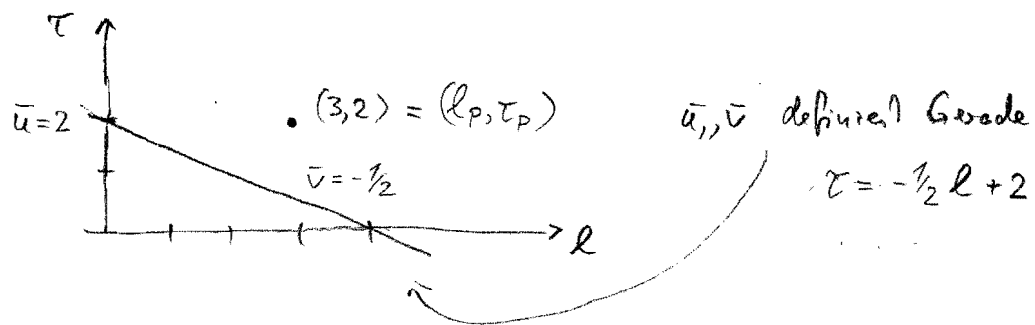
Nebenbedingungen = Halbebenen

Werte der Dualvariablen (u, v) = Punkte in der Ebene



andere, geometrisch duale Interpretation:

- Paar (u, v) als Gerade $\tau = v \cdot l + u$ in der (l, τ) Ebene aufpassen
- Nebenbedingung $u + l_p v \leq \tau_p \hat{=}$ Punkt $(l_p, \tau_p) \hat{=}$ Punkt P
- Ungleichung $\bar{u} + l_p \bar{v} \leq \tau_p$ erfüllt für Werte $\bar{u}, \bar{v}$ von u, v
 $\Leftrightarrow (l_p, \tau_p)$ liegt oberhalb der Geraden $\tau = \bar{v} l + \bar{u}$

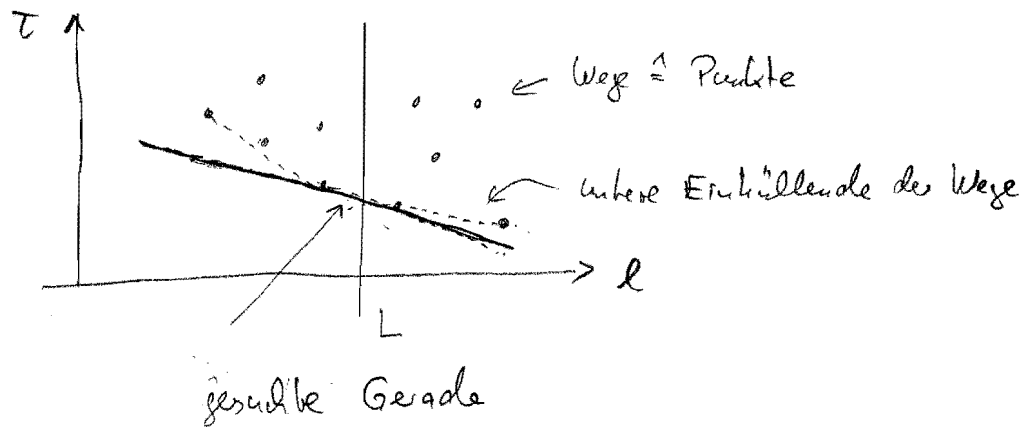


Punkt $(3, 2)$ liegt oberhalb von $\tau = -\frac{1}{2} l + 2$

$$\Leftrightarrow 2 \geq \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot 3 + 2}_{0,5}$$

- Optimierung $\hat{=}$ Suche eines Paares u^*, v^* bzw. einer Geraden $\tau = v^* \cdot l + u^*$ mit nicht-positiver Steigung ($v^* \leq 0$)
 so dass:

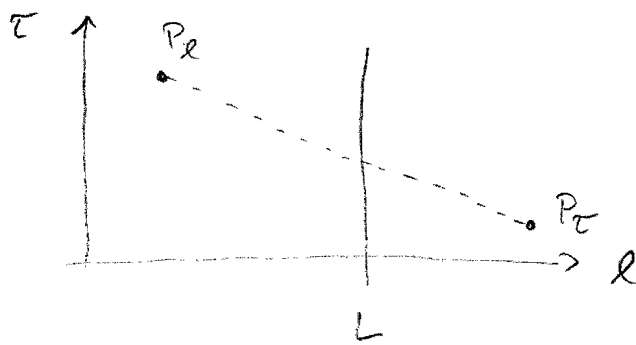
1. alle Punkte (l_p, τ_p) , P s-t Weg, liegen oberhalb dieser Geraden
2. Der Schnittpunkt der Geraden $\tau = v^*l + u^*$ mit der Geraden $l = L$ ist so groß wie möglich, denn der Schnittpunkt hat den Wert $v^*L + u^* = \text{Zielfkt. von (D)}$



Konstruktion dieser optimalen Geraden erfolgt mit dem Hüllensatz

Konstruktion des äußeren Einhüllenden bei $l = L$

1. Berechne kürzesten Weg $P_{l_{\min}}$ bzgl l
 - if $l(P_{l_{\min}}) > L$ then return "keine zulässige Lösung"
 - else $UB := \tau(P_{l_{\min}})$; // $UB \hat{=}$ obere Schranke für optimalen Weg
2. Berechne kürzesten Weg $P_{\tau_{\min}}$ bzgl τ
 - if $l(P_{\tau_{\min}}) \leq L$ then return $P_{\tau_{\min}}$ // optimal
 - else $P_{\tau} := P_{\tau_{\min}}$; $P_l := P_{l_{\min}}$ // Initialisierung P_{τ}, P_l
 - // P_{τ} und P_l erzeugen erste Gerade $\tau = \bar{v} \cdot l + \bar{u}$ mit
 - // Steigung $\bar{v} = \frac{\tau(P_{\tau}) - \tau(P_l)}{l(P_{\tau}) - l(P_l)}$



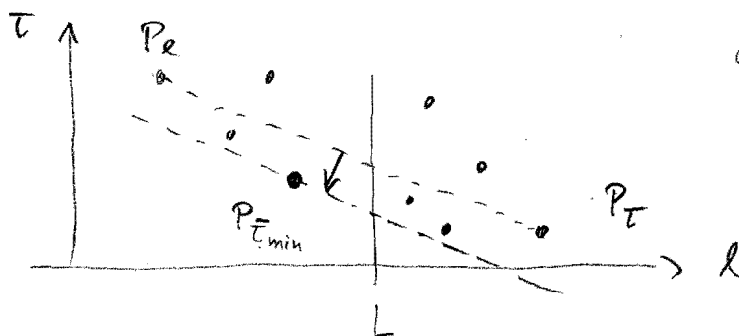
2. Prüfe ob es Punkte unterhalb der Geraden gibt.

Eine solcher Punkt entspricht einem Weg P mit

$$\bar{v} l_P + \bar{u} > \tau_P \Leftrightarrow \tau_P - \bar{v} \cdot l_P < \bar{u}$$

und kann durch kürzeste Wege-Berechnung bzgl. $\tau_a - \bar{v} l_a =: \bar{\tau}_a$ berechnet werden
 ≥ 0 wegen $\bar{v} \leq 0$

Graphisch entspricht dies einer Parallelverschiebung der Geraden auf einen extremalen Punkt (den kürzesten Weg)



da $\bar{v}$ (Steigung) unverändert

Sei $P_{\bar{\tau}_{min}}$ der neue Weg/Punkt bzgl. $\bar{\tau}_a = \tau_a - \bar{v} l_a$

if $\bar{\tau}(P_{\bar{\tau}_{min}}) = \bar{u} \Rightarrow P_{\bar{\tau}_{min}}$ liegt auf der alten Geraden

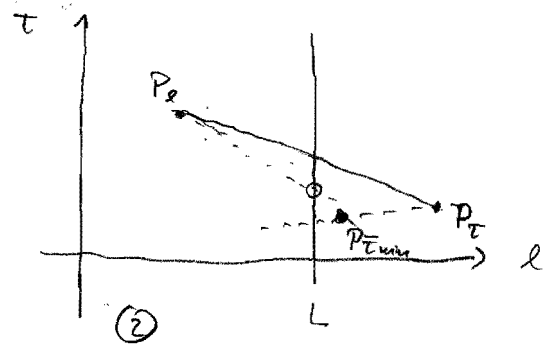
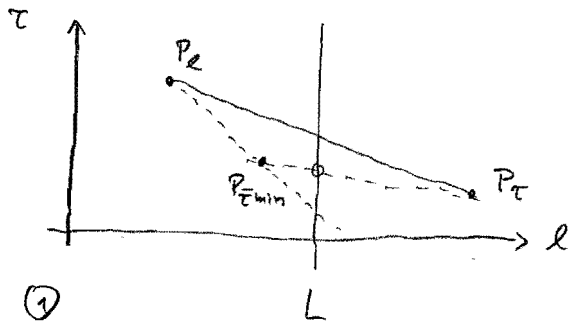
$\Rightarrow$ alte Gerade ist optimal,

Schnittpunkt mit $l = L$ ist Optimum

else Weitersuchen in 3

3. Aktualisiere die alte Gerade durch eine der

beiden Geraden durch P_L und $P_{\bar{\tau}_{min}}$ oder $P_{\bar{\tau}_{min}}$ und P_τ



Frage: Welche der beiden Geraden ist besser, d.h. Schnittpunkt ist höher auf L ?

hängt offenbar von der Lage des Punktes $P_{\bar{\tau}_{min}}$ ab:

links von L (d.h. $\tau(P_{\bar{\tau}_{min}}) \leq L$) $\Rightarrow$ ① ist besser

rechts von L (d.h. $\tau(P_{\bar{\tau}_{min}}) > L$) $\Rightarrow$ ② ist besser

Fall ①: setze $P_L := P_{\bar{\tau}_{min}}$; $UB := \tau(P_{\bar{\tau}_{min}})$

und iteriere mit neuer Geraden $\overline{P_L, P_\tau}$

Fall ②: setze $P_\tau := P_{\bar{\tau}_{min}}$, UB kann nicht aktualisiert werden

iteriere mit neuer Geraden $\overline{P_L, P_\tau}$

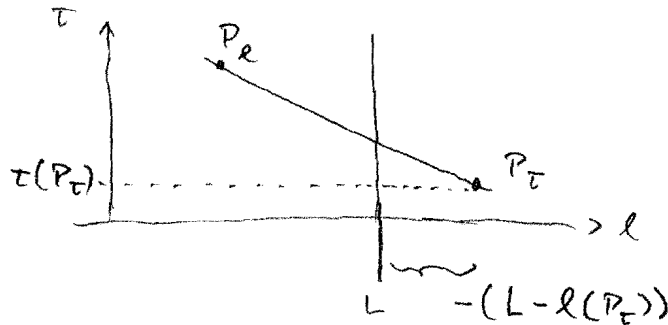
da $\tau(P_{\bar{\tau}_{min}}) > L$

Abbruch erfolgt in dem Fall, dass die Parallelverschiebung der aktuellen Geraden $\tau = \bar{v} \cdot l + \bar{u}$ keine Verbesserung ergibt.

Untere Schranke LB an das Optimum ergibt sich aus

$$LB = \bar{v} \cdot (L - l(P_T)) + \tau(P_T)$$

mit $\bar{v} = \text{Steigung der neuen Gerade} = \frac{\tau(P_T) - \tau(P_e)}{l(P_T) - l(P_e)}$



Untere Schranke LB

"

Opt.-Wert der LP-Relaxation

"

Opt.-Wert der Lagrange-Relaxation, da relaxiertes Problem

in der Lagrange Relaxation ganzzahlige Ecken hat

(ist kürzeste Wege Problem, in Kantenformulierung vollständig unimodular)

Insgesamt bleibt also dieselbe "Darstellbarkeit" wie bei der Lagrange-Relaxation. Allerdings kann die Laufzeit besser abgeschätzt werden

4.4 SATZ (Mehlhorn & Ziegelmann 00): Der Hüllensatz arbeitet korrekt und hat eine Laufzeit von

$$O(\underbrace{\log(n \tau_{\max} \cdot l_{\max})}_{\# \text{ Iterationen}} \cdot \underbrace{(n \log n + m)}_{\text{kürzeste Wege Berechnung}})$$

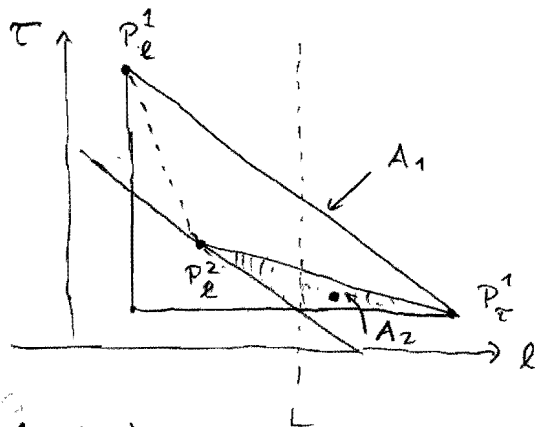
Iterationen

kürzeste Wege Berechnung

mit $\tau_{\max} := \max_a \tau_a$, $l_{\max} := \max_a l_a$

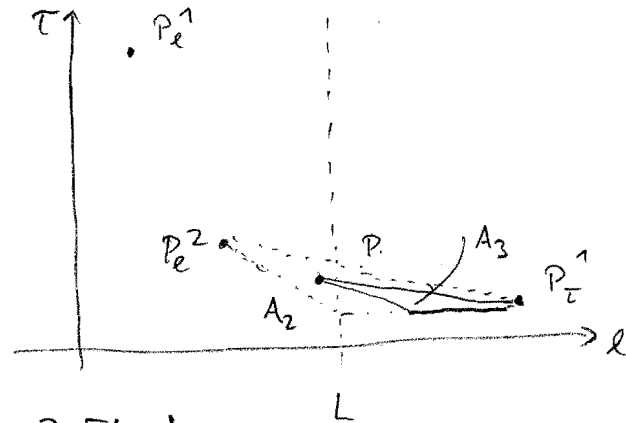
Beweis: Korrektheit lässt sich aus den vorausgegangenen Überlegungen

zur Laufzeit: geht über die Größe der "unentdeckten" Gebiete
von noch möglichen Punkten unterhalb der
momentanen Geraden



1. Iteration

Zu Beginn können
unentdeckte Punkte im
Dreieck A_1 . Nach Parallel-
verschiebung der Geraden $\overline{P_l^1 P_\tau^1}$
zum Punkt P_l^2 können
unentdeckte Punkte nun noch
im Dreieck A_2 liegen



2. Iteration

Jetzt wird P_τ^3 gefunden
und die Fläche verkleinert
sich weiter

Fläche eines Dreiecks ist maximal $\frac{1}{2} \cdot (n \cdot l_{\max}) (n \cdot \tau_{\max})$
und minimal $\frac{1}{2}$, da alle Daten ($\Rightarrow$ Punkte)
ganzzahlig sind

Für Iterationen i und $i+1$ des Hüllensatzes gilt:

$$A_{i+1} \leq \frac{1}{4} A_i$$

AUFGABE 5

$\Rightarrow$ maximal N Iterationen bis $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^N \frac{1}{2} n^2 l_{\max} \tau_{\max}$

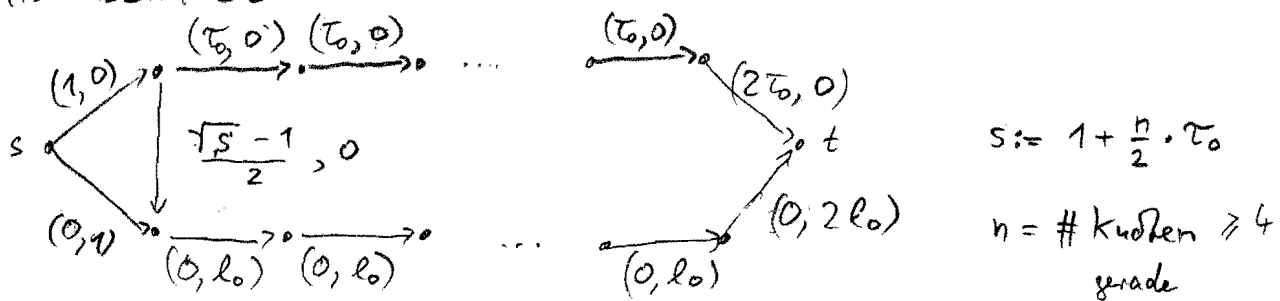
$\Rightarrow O(\log(n l_{\max} \tau_{\max}))$ Iterationen $\square$

Bemerkung: kann zeigen dass $O(m \log^2 m)$ Iterationen reichen
(Jüttner 03) $\Rightarrow$ streng polynomialer Algorithmus

Insgesamt bestimmt der Hüllensatz eine obere Schranke UB
und eine untere Schranke LB für das Optimum des CSP

Die Güte der Schranken kann allerdings i. d. beliebig schlecht werden

4.5 BEISPIEL:



$$L = \frac{n l_0}{2}, \quad l_0 > \tau_0 > 0$$

Hüllensatz findet $UB = s$ und $LB = \frac{s}{T}$ mit $T := 1 + \frac{n}{2} \cdot l_0$

optimale Kosten liegen bei $\frac{\sqrt{s}+1}{2}$

$\Rightarrow$ nur $\Omega(\sqrt{n \cdot \tau_0})$ Approximationsgüte (ergibt sich aus $\frac{OPT}{LB}$)

AUFGABE 6

Schließen der Lücke zwischen LB und UB:

z.B. durch Pareto Dijkstra, wobei Label (τ, l) verworfen werden können, wenn $\tau \geq UB$, $\tau < LB$ oder $l > L$ ist

$\Rightarrow$ wesentliche Beschleunigung, kleinere Labellisten an Knoten
und Gesamtlaufzeit mit am besten

4.5 Anwendung auf das Constrained System Optimum

$$\min \sum_a \tau_a(x_a(f)) \cdot x_a(f)$$

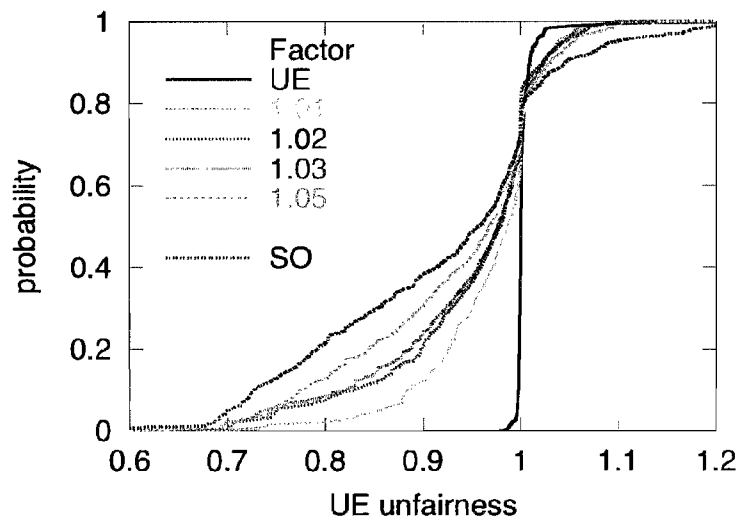
$$\text{unter } \sum_{P \in P_k^E} f_P = d_k$$

$$f_P \geq 0$$

→ lineares Problem im
 Netzwerkverfahen zerfällt
 in k CSP-Probleme

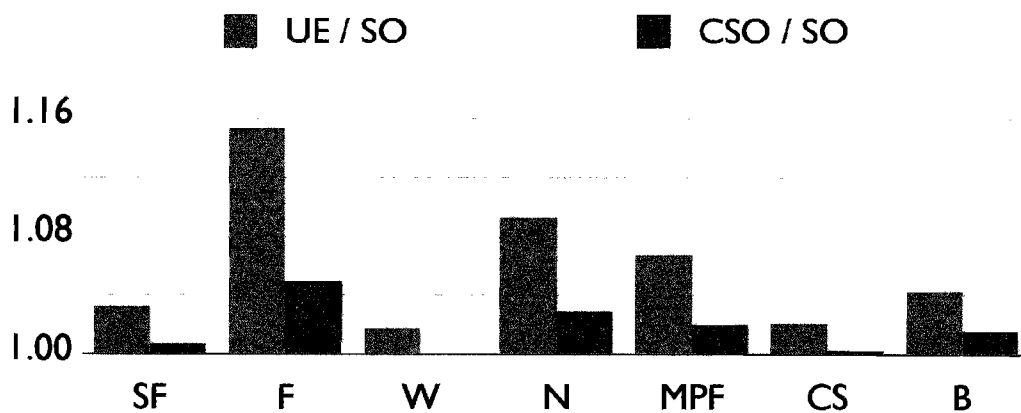
Ergebnisse: Papas, Jahn, H., Schulz, Stier → WWW

Analysis of fairness



- 75% of the users travel less than in equilibrium
- Only 0.4% of the users travels 10% more than in equilibrium
in SO needs als 5%

Results



SF Sioux Fall
F Friedrichshain
W Winnipeg

N Neukölln
MPF Berlin Mitte
CS Chicago Sketch

B = Berlin