Beweisidee: Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ $\square$

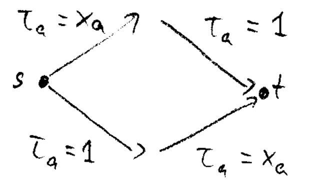
Bemerkung: keine der beiden Voraussetzungen kann fallengelassen werden $=$ $\boxed{\text{Aufgabe 1}}$

<u>Nachteile des User Equilibrium:</u>

1) Nicht optimal im Sinne des SO

2) keine Monotonie (d.h. mehr Straßen $\not\Rightarrow$ geringere Gesamtfahrzeit)

<u>1.3 Beispiel</u> (Braess Paradox)



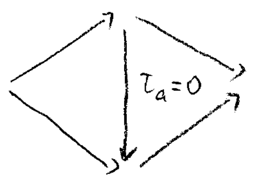
$d = 1$

UE: schicke $\frac{1}{2}$ entlang beider Pfade

$\Rightarrow \tau_p(x) = \frac{3}{2}$ auf jeden Pfad

$\Rightarrow C(x) = \sum_p \tau_p(x) \cdot x_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Baue neue schnelle Straße



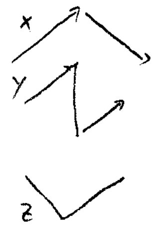
UE: schicke 1 entlang

$\Rightarrow \tau_p(x) = 2$ auf diesem Pfad

$\Rightarrow C(x) = 2 > \frac{3}{2}$

$C(SO) \le \frac{3}{2} \Rightarrow$ UE nicht optimal

Genauer Wert des SO:



$\overset{\text{Opt. Bed.}}{\Rightarrow}$ Gleichheit der marginalen Kosten auf jedem Pfad

$$\frac{d}{d(x+y)}(x+y)^2 + \frac{d}{dx}(x \cdot 1)$$

$$\frac{d}{d(x+y)}(x+y)^2 + \frac{d}{dy}(y \cdot \varepsilon) + \frac{d}{d(y+z)}(y+z)^2$$

$$\frac{d}{dz}(z \cdot 1) + \frac{d}{d(y+z)}(y+z)^2$$

$$\Rightarrow \quad \underset{①}{2(x+y)+1} = \underset{②}{2(x+y)+\varepsilon+2(y+z)} = \underset{③}{1+2(y+z)}$$

① = ③ $\Rightarrow$ $x = z$

① = ② $\Rightarrow$ $1 = \varepsilon + 2(y+z) \overset{x=z}{\Rightarrow} \quad 2x = 1-\varepsilon-2y$ ④

$x+y+z = 1 \Rightarrow 2x = 1-y$ ⑤

④,⑤ $\Rightarrow$ $1-\varepsilon-2y = 1-y \Rightarrow y = -\varepsilon$

Widerspruch zu $y \geq 0$ falls $y > 0$

$\Rightarrow$ entlang Weg 1 fließt kein Fluss $\Rightarrow$ nicht in Optimalitätsbedingung!

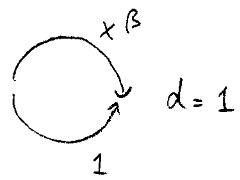
$\Rightarrow$ $x = z = \frac{1}{2}$ $\quad y = 0$ $\Rightarrow$ neue Straße wird (auch bei $\varepsilon > 0$) im Systemoptimum nicht genutzt

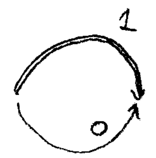
Messung, wie sich UE und SO unterscheiden

Preis der Anarchy $:= \frac{C(UE)}{C(SO)}$

1.4 Beispiel (Pigou)

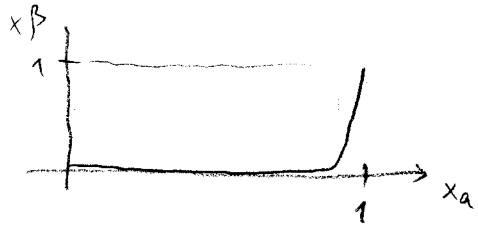
Der Preis der Anarchy kann (bei beliebigen τ_a) beliebig groß werden.



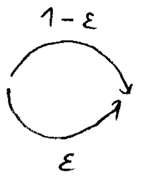
UE: 

$\Rightarrow C(UE) = 1$

β groß $\Rightarrow$ x^β hat die Gestalt



$\Rightarrow$ Fluss



hat Kosten $(1-\varepsilon)\underbrace{(1-\varepsilon)^{\beta}}_{\substack{\approx 0 \\ \text{für } \beta \text{ groß}}} + \underbrace{\varepsilon \cdot 1}_{\substack{\approx 0 \text{ für} \\ \text{klein gewähltes } \varepsilon}}$

$$\to \varepsilon \text{ für } \beta \to \infty$$

$\Rightarrow \quad \frac{C(UE)}{C(SO)} \approx \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow$ wird beliebig groß

(allerdings bei sehr steilen Fahrzeitfunktionen!)

Frage: Wie groß ist der Preis der Anarchy bei vernünftigen Fahrzeitfunktionen?

1.4 Beziehungen zwischen UE und SO

Basisbeziehung folgt aus Lemma 1.1 und der Definition des UE

Lemma 1.1 $\quad f^*$ ist SO $\iff c_P'(f^*) \leq c_Q'(f^*) \quad \forall k, \forall P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$

Def UE $\quad f$ ist UE $\iff \tau_P(f) \leq \tau_Q(f) \quad$ – " –

$\Downarrow$

1.5 Proposition (Beckmann, McGuire & Winston 1956)
Sei f^* ein zulässiger Fluss für eine Instanz mit konvexen, differenzierbaren, schwach monoton steigenden Fahrzeitfkt. $\tau_a(x_a)$. Dann gilt:

$$f^* \text{ ist SO bzgl. } \tau_a(x_a) \iff f^* \text{ ist UE bzgl. } c_a'(x_a) = \tau_a(x_a) + x_a \tau'(x_a)$$

Interpretation:

(1) SO ist UE bzgl der marginalen Kosten $c_a'(x_a)$ als Fahrzeitfkt

(2) UE ist SO bzgl der Fahrzeitfkt. $\frac{1}{x_a}\int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt =: \hat{\tau}_a(x_a)$

denn: $\frac{d}{dx_a}\left(x_a \cdot \hat{\tau}(x_a)\right) = \tau_a(x_a) \quad \Rightarrow \quad$ Opt Bed für SO für $\hat{\tau}$ $\hat{=}$ Wardrop Bed für τ

$\Rightarrow$ UE ist SO bzgl Kostenfkt $C(x) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt$ (Beckmann Transformation)

1.6 Folgerung

(1) Unter den Voraussetzungen von Prop. 1.5 ist das UE f eindeutig als Kantenfluss bestimmt

(2) Für alle Pfade $P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P, f_Q > 0$ gilt
$\tau_P(f) = \tau_Q(f) =: L_k(f)$
[alle Fluss führenden (s_k, t_k) Wege haben dieselbe Fahrzeit]

(3) UE und SO können mit denselben Methoden berechnet werden

Beweis:

zu (1): UE ist SO bzgl. $\underbrace{\int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt}_{\text{streng monoton, diffbar, konvex}} =: \tau_a^*(x_a)$

$\Rightarrow$ UE ist Optimum einer konvexen, separablen streng monotonen Fkt

$\Rightarrow$ eindeutiges Optimum

zu (2) folgt aus Def des Wardrop Equilibrium □

1.7 Folgerung (Mautgebühren)

Prop. 1.5 ist Basis für Streckenzölle (im Prinzip)

Wenn man ein SO bzgl. τ_a erzielen will, so muss man durch Maut die "Kosten" pro Kante zu $\underbrace{\tau_a(x_a)}_{\text{Zeit}} + \underbrace{x_a \tau'(x_a)}_{\text{Maut}}$ verändern

gleichgewichtet

Für die weiteren Überlegungen ist folgende Technik nützlich:

Sei f ein zulässiger, fester Fluss.

Die <u>Kosten eines zulässigen Flusses x relativ zu Fahrzeiten bzgl f</u>

sind $C^f(x) := \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a(f_a)$

Flussmenge bzgl x — Fahrzeit bzgl f

1.8 Proposition (Smith 1979, Dafermos 1980)

f sei zulässig für eine Instanz mit stetigen, schwach monotonen τ_a.

Dann gilt:

f ist UE $\Leftrightarrow$ $C^f(f) \le C^f(x)$ für alle zulässigen Flüsse x

Interpretation: UE f minimiert die relativen Kosten C_1^f

Beweis: "$\Rightarrow$"

$$f \text{ UE } \Rightarrow \tau_P(f) = L_k(f) \quad \text{für alle } P \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f_P > 0$$
$$\tau_Q(f) \geq L_k(f) \quad Q \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f_P = 0$$

Für einen beliebigen Fluss x gilt dann

$$C_1^f(f) = C_1(f) = \sum_k \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_k \\ f_P > 0}} L_k(f) \cdot f_P \leq \sum_k \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_k \\ x_Q > 0}} L_k(f)\, x_Q \qquad (*)$$
$$= C^f(x)$$

"$\Leftarrow$"

$C^f(f) \leq C^f(x)$ nach Voraussetzung $\forall$ zul. Flüsse x

Annahme: f kein UE

$\Rightarrow \exists\, k,\ Q, R \in \mathcal{P}_k$ mit $f_Q > 0$ und $\tau_Q(f) > \tau_R(f)$

Sei x der Fluss, der aus f entsteht, indem aller Fluss auf Q auf den Weg R geschickt wird

$$\Rightarrow C^f(f) - C^f(x) = \tau_Q(f) \cdot f_Q - \tau_R(f) \cdot f_Q$$
$$= (\tau_Q(f) - \tau_R(f))\, f_Q > 0$$

$\Rightarrow C^f(f) > C^f(x)$, Widerspruch $\square$

1.9 SATZ (Roughgarden & Tardos 2002)

Für affin lineare Fahrzeitfunktionen $\tau_a(x_a) = \alpha_a x_a + \beta_a$ gilt $\frac{UE}{SO} \leq \frac{4}{3}$

Ist $\beta_a = 0$ für alle a, so ist $\frac{UE}{SO} = 1$