ADM III Angewandte Netzwerkoptimierung

Verkehr (Verkehrslenkung, Fahrplanopt., Scheduling)

www.math.tu-berlin.de/coga/lehre

V4 mit integrierten Übungen

3 Termine die Woche Di, Do, Fr

ca 20 Juni fertig

wolf.mading@tu-berlin.de → in Verteiler

Anschließendes Seminar im WS 09/10

I Verkehr und Flüsse

§1 Das Basismodell für statischen Verkehr

1.1 Grundlagen

Rushhour ⇒ statisches Bild für einige Stunden

⇒ Standardflussmodelle anwendbar

x_a = Flussmenge / Zeiteinheit auf Kante a (arc)

Digraph $G = (V, A)$ modelliert Straßennetz A = arcs

$|A| = 30.000$ in Berlin

$|A| = 12$ Mio in Deutschland

42 Mio in Europa

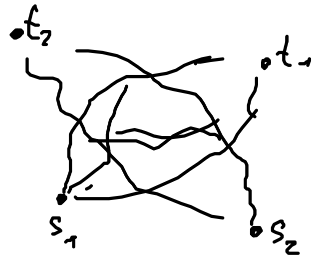
Start-Ziel-Knotenpaare (s_k, t_k) $k \in C$ (commodity)

mit demand d_k = Flussmenge

Fluss zwischen s_k, t_k kann sich beliebig aufteilen

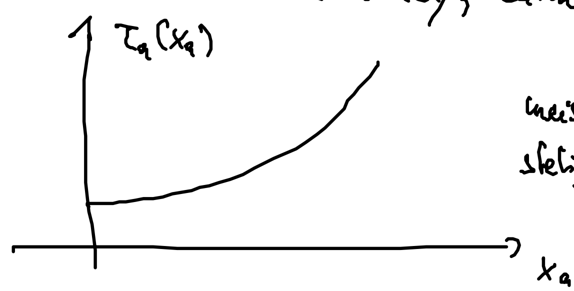
(stetiger Fall, sinnvoll wenn x_a groß)

Interaktion zwischen verschiedenen s_k, t_k durch Stau (congestion)



Fluss x_a auf Kante a verursacht eine flussabh. Fahrzeit $\tau_a(x_a)$

(latency, Latenz)



meist als stetig, streng monoton $\nearrow$

z.B. Bureau of Public Roads

$$\tau_a(x_a) := \tau_a^0 \left(1 + \alpha \left(\frac{x_a}{u_a} \right)^{\beta} \right)$$

$\uparrow$ free flow travel time

u_a = practical capacity

typische Werte: $\beta = 4$

$\alpha = 0{,}15$

Fluss darstellbar als Kantenfluss
$$x^A = \begin{pmatrix} \text{Fluss auf Kante } 1 \\ \vdots \\ \text{Kante } m \end{pmatrix}$$

oder als Pfadfluss
$$x^P = \begin{pmatrix} \text{Fluss auf Weg } 1 \\ \vdots \\ \text{auf Weg } p \\ \text{auf Kreis } 1 \\ \vdots \\ \text{auf Kreis } q \end{pmatrix} \qquad p + q \leq m$$

$\mathcal{P}_k$ = Menge der s_k, t_k Pfade

$\mathcal{P} = \bigcup_k \mathcal{P}_k$

Flüsse auf Kreisen interessieren in der Verkehrsplanung nicht

o.B.d.A. $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_k = \emptyset \quad \forall i \neq k$

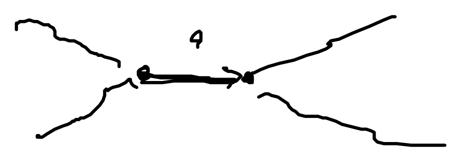
Ein Pfadfluss ist zulässig

$:\Leftrightarrow \quad \sum_{p \in \mathcal{P}_k} x_p = d_k \, , \quad x_p \geq 0$

"Kosten" $C(x)$ eines Pfadflusses

$$:= \boxed{\sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a(x_a)} \quad \hat{=} \text{ Gesamtfahrzeit (Netzbelastung)}$$

$$x_a = \sum_{p \ni a} x_p$$



$$= \sum_{a \in A} \Big(\sum_{p \ni a} x_p \Big) \cdot \tau_a(x_a) \quad \text{Kantenversion der Kosten}$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{a \in p} x_p \cdot \tau_a(x_a) = \boxed{\sum_{p \in \mathcal{P}} x_p \cdot \underbrace{\sum_{a \in p} \tau_a(x_a)}_{=:\, \tau_p(x)}} \quad \text{Pfadversion der Kosten}$$

$=: \tau_p(x)$ Fahrzeit entlang Weg p

Bemerkung: Kosten können auch bzgl. allgemeiner Kantenkostenfkt $c_a(x_a)$ betrachtet werden

hier: $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$

dann $C(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} x_p \cdot c_p(x)$ mit $c_p(x) = \sum_{a \in p} c_a(x_a)$

generelle Voraus.

$x_a \cdot \underline{\tau_a(x_a)}$ sind konvex

stetig, monoton

1.2. Das Systemoptimum (SO)

Problem SO:

$$\min \; C(x)$$
$$\text{unter} \sum_{P \in \mathcal{P}_k} x_P = d_k \quad \forall k \in C$$
$$x_P \geq 0$$

lineare Nebenbed.

ist nichtlineare, separable konvexe Zielfkt

als $\sum \underbrace{x_a \cdot \tau_a(x_a)}_{\text{konvex}}$ schreibbar

konvex $\Rightarrow$ $\boxed{\text{lokales Opt} = \text{globales Opt}}$

sehr große # von Nebenbed.

Wege exponentiell in # Knoten bzw. Kanten

Kann im Kantenmodell rechnen, Wegzerlegung ist dann nicht eindeutig

lösbar mit Ellipsoidmethode in polyn. Zeit (bis auf ein additives $\varepsilon > 0$)

Techniken der nichtlin. Optimierung für lokale Optima nutzen

Kuhn-Tucker-Bedingungen, first order Bedingungen.

Diese ergeben hier folgendes

1.1. Lemma (Optimalitätsbed. für SO)

Seien die $c_a(x_a)$ konvex und diff'bar

Dann ist ein Fluss f^* optimal in SO

$$\iff \quad c'_P(f^*) \le c'_Q(f^*) \quad \forall\, k \in C \;\; \forall \text{ Pfade } P, Q \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f^*_P > 0$$

$$\text{mit } \; c'_P(f^*) := \sum_{a \in P} \frac{d}{d x_a} c_a(x_a) \; \left[= \sum_{a \in P} c'_a(x_a) \right]$$

Speziell für $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$ ergibt sich

$$c'_a(x_a) = \tau_a(x_a) + x_a \cdot \tau'_a(x_a)$$

exaktes Beweis später

Bemerkungen:

1. Fluss f^* ist lokal optimal (reicht!)

   $\iff$ Verlagerung von Fluss auf anderen Pfad erhöht Kosten

   $\iff$ marginalen Kosten für Verringerung von Fluss entlang (s_k, t_k) Pfad

   $\le$ .... Vergrößerung ...... anderem (s_k, t_k) Pfad

   $\iff$ $c'_P(f^*) \le c'_Q(f^*) \quad \forall \ldots$

2. Interpretation im Fall $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$

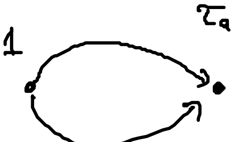
$$c'_a(x_a) = \underbrace{\tau_a(x_a)}_{\text{reine Fahrzeit}} + \underbrace{x_a \cdot \tau'(x_a)}_{\text{"externe" Kosten}} \qquad \text{marginale Kosten}$$

die Nutzer für andere Nutzer verursacht bei Nutzen der Kante a

Beispiel: Pigous Beisp.

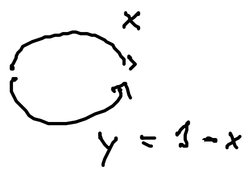
$\tau_a(x_a) = x_a^{\beta}$

$d = 1$



$\tau_a(x_a) = (\beta + 1)(1 - \varepsilon) = \text{konstant} \quad (0 < \varepsilon < 1)$

Optimalitätsbed.:



$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot x^{\beta}\right) = \frac{d}{dy}\left((\beta+1) \cdot (1-\varepsilon) \cdot y\right)$$

Gleichheit $\Leftrightarrow$ $\cancel{(\beta+1)}\, x^{\beta} = \cancel{(\beta+1)}\,(1-\varepsilon)$

$$x^{\beta} = 1-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[\beta]{1-\varepsilon} < 1$$

$$\Rightarrow \quad y > 0$$

Im SO folgendes Bild:

Fahrzeit oben ist $\tau_a(x_a) = \left(\sqrt[\beta]{1-\varepsilon}\right)^{\beta} = 1-\varepsilon$

Fahrzeit unten ist $(\beta+1)(1-\varepsilon) \to \infty$ für $\beta \to \infty$

$\Rightarrow$ "Einige" $(y>0)$ werden geopfert für das Allgemeinwohl

1.3 Das Nutzergleichgewicht (User Equilibrium)

Nutzer sind eigennützig, suchen für sich den schnellsten Weg

Ein zul. Fluss f ist im <u>Wardrop Equilibrium</u> (Wardrop 52)

$:\Leftrightarrow \quad \tau_P(f) \le \tau_Q(f) \quad \forall\, k \in C \quad \forall\, P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$

Nash: allgemeine Gleichgewichte für nicht-kooperative Spiele (51)

aus unserer Sicht:

Ein zul. Fluss f ist im Nash Gleichgewicht (User Equilibrium, UE)

$:\Longleftrightarrow$ kein Nutzer kann sich unilateral durch Wahl eines anderen Pfades verbessern

$\Longleftrightarrow$ $\forall\, k \in C\ \forall\, Q, R \in \mathcal{P}_k$ mit $f_Q > 0$

und $\forall\, 0 \le \varepsilon \le f_Q$ gilt

Der Fluss f^ε definiert durch

$$f_P^\varepsilon := \begin{cases} f_Q - \varepsilon & \text{für } P = Q \\ f_R + \varepsilon & P = R \\ f_P & \text{sonst} \end{cases}$$

] ε Einheiten gehen von Q auf R

erfüllt $\tau_Q(f) \le \tau_R(f^\varepsilon)$

1.2 Lemma (UE $\hat{=}$ Wardrop Equilibrium)

Sind alle $\tau_a(x_a)$ stetig und schwach wachsend $\nearrow$ so gilt für jeden zulässigen Fluss

f ist im UE $\Longleftrightarrow$ f ist im Wardrop Equilibrium

Beweis: $\varepsilon \to 0$

$\boxed{\text{Aufgabe 1:}}$ Keine der beiden Voraus. kann weggelassen werden

Nachteile des UE:

1) Nicht optimal im Sinne des SO

2) keine Monotonie (d.h. mehr Straßen $\not\Rightarrow$ geringere Gesamtfahrzeit)