

§8 Schranken für q_c und kurze Kreisbasen

Haben durch die bisherigen MIP-Formulierungen 2 verschiedene "Suchräume"

(1) zulässige periodische Potentiale
 $= \sum_{i \in Z} \text{Periodenoffset } p_i + \text{zulässiges Potenzial}$
 Suchraum, schwer zu finden einfach bei gegebenem p_i

(2) zulässige periodische Potentiale
 $= \sum_{i \in Z} \text{Vielfache } q_c \text{ von } T + \text{zulässiger Vektor } x$
 Bsp. $\sum_{i \in Z} \text{Basis des Zykelraums}$ d.h. $l_a \leq x_a \leq u_a$
 Suchraum, schwer zu finden einfach bei gegebenem q_c

Welcher Suchraum ist besser? kleiner?

Kap für "Güte" könnte die Herleitung von unteren oberen Schranken für die p_i bzw q_c sein.

Ist $q_c \leq q_c \leq \bar{q}_c$ so gilt für den Suchraum der q_c

$$\{ \text{mögliche Vektoren } q \} \subseteq \prod_{c \in E} [q_c, \bar{q}_c]$$

↑
Kreisbasis

$$\Rightarrow \text{Größe Suchraum} \leq \prod_{c \in E} (\bar{q}_c - q_c)$$

↑ Kap für Güte

8.1 Schranken an die f_c durch Kreisgleichungen

8.1 SATZ (Odijk 94): Es gibt eine zulässige periodische Spannung x zu Kreisvielfachen f_c

$$\Leftrightarrow f_c \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right) \text{ für jeden elementaren Kreis } C$$

Beweis:

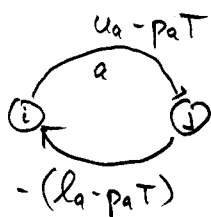
Sei x zulässige periodische Spannung

$$\Leftrightarrow \exists \text{ Periodenoffset } p_a \text{ mit } l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a \quad \forall a \in E(G)$$

$\Leftrightarrow x_a$ ist zulässige aperiodische Potentialdifferenz bzgl

Restriktionen $[l_a - p_a T, u_a - p_a T]$ auf Kante a

\Leftrightarrow (Satz 6.1) Digraph \bar{G} mit Kantengewichte



hat keinen gerichteten Kreis negativer Länge

$$\Leftrightarrow \sum_{a \in C^+} (u_a - p_a T) - \sum_{a \in C^-} (l_a - p_a T) \geq 0 \quad \forall \text{ elementaren ungerichteten Kreise von } G$$

$$\Leftrightarrow \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a - p^T \psi(C) \cdot T \geq 0$$

↑ Vektor der p_a

$$\Leftrightarrow p^T \psi(C) \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right)$$

bleibt zu klären: Wie verhält sich φ_C zu $P^T \varphi(C)$?

$$x^T \varphi(C) = P^T \varphi(C)$$

↑
Beweis Satz 7.2
(1) \Rightarrow (2)

$$= \varphi_C \quad \square$$

8.2 KOROLLAR: Die Kreisverläufe φ_C einer zulässigen periodischen Spannung erfüllen die Kreisgleichungen

$$\underbrace{\left[\frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right]}_{=: \varphi_C} \leq \varphi_C \leq \underbrace{\left[\frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right) \right]}_{=: \bar{\varphi}_C}$$

Beweis: $\varphi_C \leq \bar{\varphi}_C$ folgt aus Satz 8.1 und $\varphi_C \geq \varphi_C$

Sei \bar{C} der Kreis zu C mit umgekehrter Orientierung

$$\Rightarrow \bar{C}^+ = C^-, \quad \bar{C}^- = C^+ \quad \varphi_{\bar{C}} = -\varphi_C$$

$$\text{Satz 8.1} \Rightarrow \varphi_{\bar{C}} \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in \bar{C}^+} u_a - \sum_{a \in \bar{C}^-} l_a \right)$$

$$\Leftrightarrow -\varphi_C \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^-} u_a - \sum_{a \in C^+} l_a \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi_C \geq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_C \geq \varphi_C \quad \square$$

8.2 Polyedertheoretische Interpretation der Kreisungleichungen

Betrachte das Polyeder

$$Q := \left\{ (\pi, p) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \mid \begin{array}{l} \pi_j - \pi_i + p_a T \leq u_a \\ -(\pi_j - \pi_i + p_a T) \leq -l_a \end{array} \quad \forall a \in E(G) \right\}$$

$$= \text{Polyeder der Form } \{x \mid Ax \leq b\}$$

Sind bzgl. PESP an gez. Kante Q_I von Q interessiert

Wissen aus ADM II, dass Chvatal-Gomory Schnitte gültige Ungleichungen für Q_I definieren

$$\underbrace{y^T A x}_{\text{gez}} \leq \lfloor y^T b \rfloor$$

8.3 PROPOSITION: Die Kreisungleichungen

$$\underline{f}_c \leq f_c = P^T f(C) \leq \bar{f}_c$$

sind Gomory-Chvatal-Schnitte

Beweis: will zu zeigen für $P^T f(C) \leq \bar{f}_c$

entspricht Gomory-Chvatal-Schnitt $y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor$

$$\text{mit } y^T = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{\pi} \quad \underbrace{y_{e_1} \dots y_{e_m}}_{\text{mit } y_e := \frac{1}{T} f(C)_e} \quad \square$$

8.4 PROPOSITION: Der Chvátal-Rang von Q ist unbeschränkt
(mit wachsender Graphengröße n).

Speziell ist also $Q_I \subsetneq Q + \text{Kreis-Ungleichungen}$

Beweis nutzt allgemeines Resultat von Boyd & Palleysblatt 84
über Chvátal Rang und NP-Theorie:

8.5 SATZ: Sei $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine polynomial lösbar Familie
reiner Polyeder, so dass das Problem

Geg. $k, c \in \mathbb{Q}^k, \delta \in \mathbb{Q}$

Frage ist $\max \{ c^T x \mid x \in P^k, x \geq 0 \} > \delta$

NP-vollständig ist. Ist denn $NP \neq coNP$, so existiert

kein $t \in \mathbb{N}$ mit $(P^k)^{(t)} = (P^k)_I$ für alle $k \in \mathbb{N}$

ohne Beweis (siehe Schrijver - Buch 1986) \square

Beweis Proposition 8.4: $P^k := Q \begin{matrix} \uparrow \uparrow \\ \pi \quad p \end{matrix} \quad k = n+m$

MAX Variante von PESP NP-vollständig

\Rightarrow Voraussetzungen von Satz 8.5 erfüllt

\Rightarrow Rang(P^k) unbeschränkt \square

AUFGABE 15: Finden eine gültige Ungleichung für Q_I ,
die nicht von einer Kreisungleichung "dominiert"
wird.

8.3 Kleiner Subraum durch kurze Kreisbasen

Sei B eine ganzzahlige Kreisbasis (= Basis des Zykkelraums)

Korollar 8.2 \Rightarrow

$$\underbrace{\left[\frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right]}_{f_c} \leq f_c \leq \underbrace{\left[\frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right) \right]}_{\bar{f}_c}$$

\Rightarrow mögliche Werte von f_c sind $\underbrace{f_c, f_c+1, \dots, \bar{f}_c}_{\bar{f}_c - f_c + 1 \text{ Werte}}$

\Rightarrow Maß für Größe des Lösungsraum ist

$$\prod_{c \in B} (\bar{f}_c - f_c + 1) \rightarrow \text{klein}$$

$$\hat{=} \prod \left(\frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right) - \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right) \rightarrow \text{klein}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \sum_{a \in C^+} (u_a - l_a) + \sum_{a \in C^-} (u_a - l_a) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{a \in C} (u_a - l_a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{=} \sum_{c \in B} \sum_{a \in C} (u_a - l_a) \quad \text{klein} \\ & \uparrow \\ & \log \end{aligned}$$

$\hat{=}$ Länge der Basis B bzgl. Kantenbewertung $u_a - l_a$

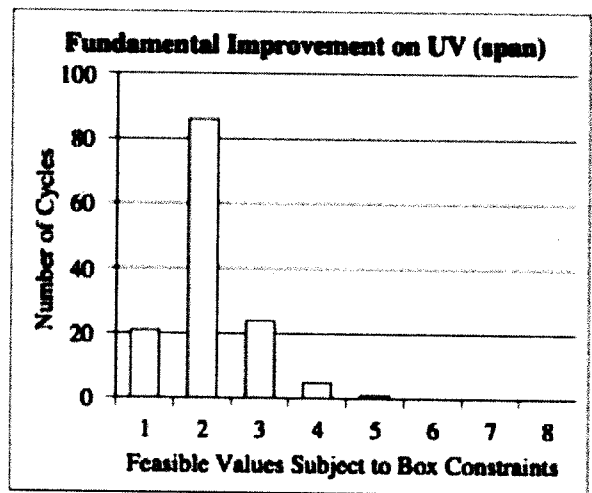
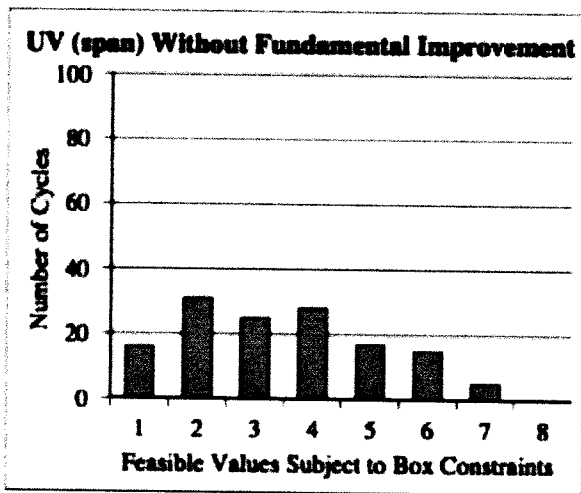
Kurze Kreisbasis $\hat{=}$ kleine Länge

minimale Kreisbasis (in einer bestimmten Klasse)

= Basis mit kleinster Länge aus der Klasse

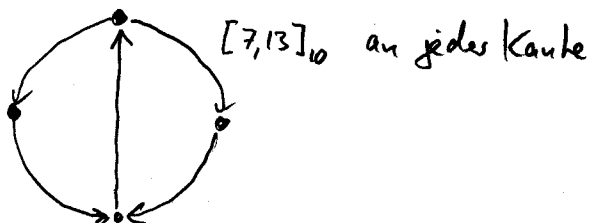
hat Einfluss auf Rechenzeit von CPLEX

da Spanne $\bar{z}_c - z_c$ deutlich kleiner wird



- Rechenzeiten sinken um mehrere 100%
- Instanz lösbar wenn Größe Suchraum $\leq 10^{50}$
- Instanz unlösbar ----- $\geq 10^{90}$

Beispiel:



Abschätzung über Potenzzielwert: $10 \pi_i \in \{0, \dots, T-1\}$

$\rightarrow 10^5$ Kombinationen prüfen

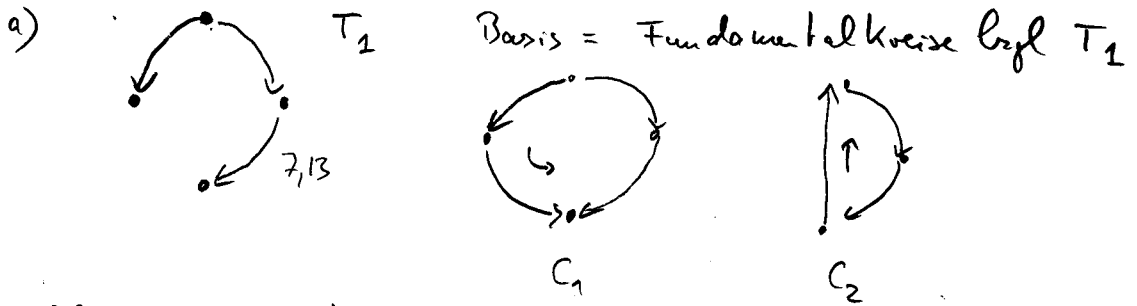
für jede Kombination pro Kante geeigneter p_a suchen (leicht)

Abzählung über Spannungen

pro Kante $x_a \in \{7, \dots, 13\} \Rightarrow 7^5$ Kombinationen

für jede Kombination pro Kante prüfen ob $\Gamma^T x = z \cdot T$ ist (leicht)

Abzählung über Basen

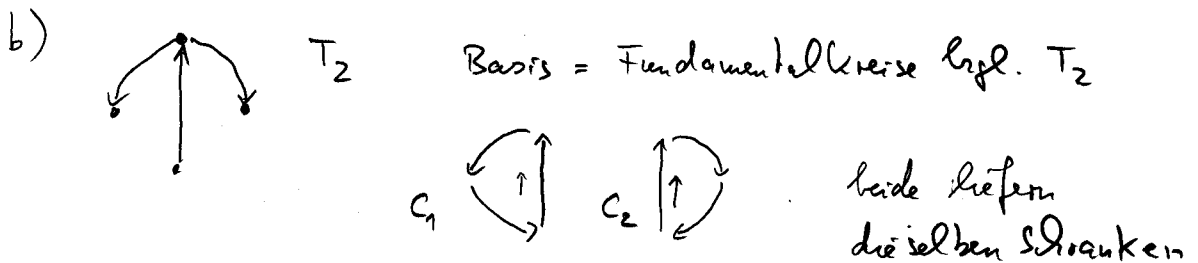


Spannen aus Kreisgleichungen

$$\begin{cases} \underline{q}_{C_1} = \left\lceil \frac{1}{10} ((7+7) - (13+13)) \right\rceil = -1 \\ \bar{q}_{C_1} = \left\lfloor \frac{1}{10} (13+13) - (7+7) \right\rfloor = 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq q_{C_1} \leq 1$$

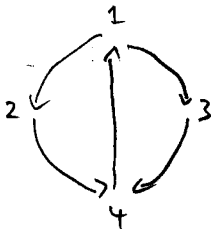
$$\begin{cases} \underline{q}_{C_2} = \left\lceil \frac{1}{10} (7+7+7) \right\rceil = 3 \\ \bar{q}_{C_2} = \left\lfloor \frac{1}{10} (13+13+13) \right\rfloor = 3 \end{cases} \Rightarrow q_{C_2} = 3$$

\Rightarrow nur 3 mögliche Lösungen!



$$\begin{cases} \underline{q}_{C_1} = \underline{q}_{C_2} = \left\lceil \frac{1}{10} (7+7+7) \right\rceil = 3 \\ \bar{q}_{C_1} = \bar{q}_{C_2} = \left\lfloor \frac{1}{10} (13+13+13) \right\rfloor = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{nur 1 Lösung}$$

Lösung x ergibt sich aus $\Gamma^T x = T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$



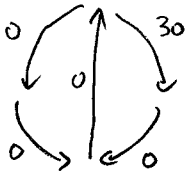
$$\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} (1,2) & (1,3) & (2,4) & (3,4) & (4,1) \\ \hline 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & 1 \end{array} \right. \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

0 setzen

$$\Rightarrow x_{13} = 30$$

$$\Rightarrow x_{12} = 0$$

$$x_{ij} = 0 \text{ sonst}$$



8.3.1 Kurze Kreisbasen in der Menge aller Kreisbasen

ist polynomial (im Gegensatz zu ungerade Teilklassen)

zunächst einige Vorbereitungen:

Zielfunktion $\sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{a \in C} (u_a - l_a)$ hängt nicht von Orientierung

der Kanten ab \Rightarrow kann zugrunde liegenden ungerichteten

Graphen verwenden

Bzgl. ungerichteten Graphen betrachte man in der Regel den Kreisraum über $GF(2)$. Folgendes Lemma zeigt, dass dies auch bzgl. kurzer Basen möglich ist

8.6 LEMMA: Sei G ein Digraph und G' der zugrunde liegende ungerichtete Graph. Sei B eine Menge von ν Kreisen aus dem Zykelraum von G in \mathbb{R}^E und sei B' die Menge der umkehrigen ungerichteten Kreise in G' . Dann gilt:

$$\det B \text{ ist ungerade} \iff B' \text{ ist Zykelbasis von } G' \\ \text{Zykl. GF}(2)$$

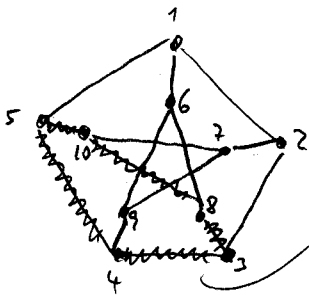
Beweis: Betrachte Laplace Entwicklung von $\det B$ und $\det B'$

Dann gilt wegen Rechnung in $\text{GF}(2)$

$$\det B = 2k, k \in \mathbb{N} \iff \det B' = 0 \quad \square$$

Beispiel: Es gibt Basen in G über \mathbb{R} , die keine Basis von G' über $\text{GF}(2)$ induzieren

Petersen Graph:



jedes dieser Kreise + dem inneren Stern bilden Basis

(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(6,8)	(8,10)	(10,7)	(7,9)	(9,6)	(1,6)	(2,7)	(3,8)	(4,9)	(5,10)
1	1				-1					-1		1		
		1	1								-1	1		
			1	1								-1	1	
				1	1								-1	1
1					1									-1
						1	1	1	1	1				

Summe der Kreise $\neq 0$ über \mathbb{R} , aber $= 0$ über $\text{GF}(2)$

8.7 FOLGERUNG: Jede ganzzahlige m in G ist eine Basis in G'

d.h. es reicht, im ungerichteten Graphen eine kurze Basis zu finden und dann zu prüfen, ob sie im gerichteten gzz. ist.

verhältnißmäßig, da Linearkombinationen über $GF(2)$ besonders einfach sind, nur Koeffizienten 0, 1

8.8 ALGORITHMUS (de Pina 95, Berger et al 04, Kavitha et al 05)

Input: Ein ungerichteter z.B. Graph G mit positiven Kantengewichten w_e

Output: eine minimale Kreisbasis \mathcal{B} über $GF(2)$

Methode: (Berechne Kreise aus \mathcal{B} iterativ, indem man einen kürzesten Kreis aus dem orthogonalen Komplement der bisherigen wählt)

1. $\mathcal{B} := \emptyset$

2. for $i := 1$ to v do

3. if $i = 1$ then sei $S_1 \in \{0, 1\}^m$ beliebig, $S_1 \neq 0$
else

4. sei $S_i \neq 0$ in $\{0, 1\}^m$ orthogonal zu den bereits betrachteten Kreisen C_1, \dots, C_{i-1} aus \mathcal{B}
d.h., S_i ist nichttriviale Lösung x des linearen Gleichungssystem

$$\mathcal{P}(C_k)^T \cdot x = 0 \quad k = 1, \dots, i-1$$

5. berechne den kürzesten Kreis C_i (d.h. $w(C_i)$ minimal) mit $\mathcal{P}(C_i)^T \cdot S_i = 1$

6. $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{C_i\}$

8.9 SATZ (de Pina 95; Berger et al 04; Karthik et al 04)
 Algorithmus 8.8 berechnet eine kleinste Kreisbasis über $\text{GF}(2)$

Beweis: Annahme nicht. Betrachte dann das kleinste i so dass C_1, \dots, C_{i-1} zu einer minimalen Kreisbasis B^* erweiterbar ist, aber nicht C_1, \dots, C_{i-1}, C_i

B^* Basis $\Rightarrow C_i$ ist durch Kreise aus B^* linear kombinierbar,
 etwa $C_i = \underbrace{D_1 + \dots + D_k}_{\text{Inzidenzvektoren und Kreise identifiziert}} \quad (1)$

Inzidenzvektoren und Kreise identifiziert

$$C_i^T \cdot S_i = 1 \quad \text{ergibt} \quad \sum_{l=1}^k D_l^T \cdot S_i = 1$$

$$\Rightarrow (\text{GF}(2)) \quad \text{mindestens ein } D_j^T \cdot S_i = 1$$

$$\Rightarrow (C_i \text{ kleinster Kreis mit } C_i^T S_i = 1) \quad w(C_i) \leq w(D_j)$$

Betrachte $B' := B^* - \{D_j\} \cup \{C_i\}$

$$(1) \Rightarrow D_j = C_i + D_1 + \dots + D_{j-1} + D_{j+1} + \dots + D_k$$

$$\Rightarrow D_j \text{ durch } B' \text{ ausdrückbar}$$

$$\Rightarrow B' \text{ ist ebenfalls Basis}$$

Claim: $B' \supseteq \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$

Beweis Claim: $\{C_1, \dots, C_{i-1}\} \subseteq B^*$

Aus B^* weggelassener Kreis $D_j \notin \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$

da $D_j^T S_i = 1$, aber $C_l^T S_i = 0$ für $l = 1, \dots, i-1$

$w(C_i) \leq w(D_j) \Rightarrow B'$ ist minimale Basis

Claim $\Rightarrow B'$ erweitert C_1, \dots, C_i zu minimaler Basis
 \Rightarrow Widerspruch \square

Aufwand des Algorithmus:

Kritisch sind Schritte 4: Gleichungssystem lösen

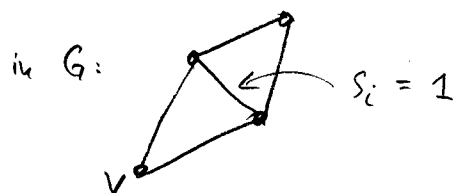
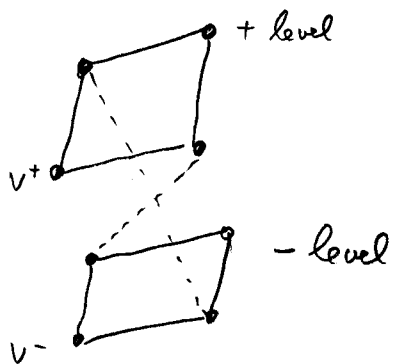
5: Kürzesten Kreis mit Nebenbed. berechnen

zu 5: über kürzesten Wege Berechnung im Hilfsgraphen G_i in Iteration i

$G_i = (V_i, E_i)$ mit $V_i := \{v^+, v^- \mid v \in V\}$

$E_i := \{ (u^+, v^+), (u^-, v^-) \mid e = (u, v) \in E, (S_i)_{(u,v)} = 0 \} \cup$

$\{ (u^+, v^-), (v^-, u^+) \mid (S_i)_{(u,v)} = 1 \}$



Kanten bekommen das Gewicht der sie erzeugenden Kante (u, v)

Jeder v^+, v^- -Weg in G_i entspricht in G einem Kreis C (nach Kürzung 2x durchlaufener Kanten), der eine ungerade Anzahl von S_i -Kanten benutzt. Hieran gilt auch die Umkehrung.

\Rightarrow Schritt 5 kann durch kürzeste Wege Suche und Dijkstra von jedem Knoten v^+ aus in G_i behandelt werden

$\Rightarrow O(n \cdot SP(n, m))$ für Iteration i

$\Rightarrow O(mn \cdot SP(n, m))$ insgesamt.

$m 4$: Gleichungssystem hat maximal v Gleichungen und m Variablen $\Rightarrow O(m^3)$ pro Gauss-Elimination

$\Rightarrow O(m^4)$ insgesamt

Verbesserung möglich

8.10 SATZ (Kamitha et al 04): Algorithmus 8.8 kann in $O(m \cdot n \cdot SP(n, m))$ implementiert werden

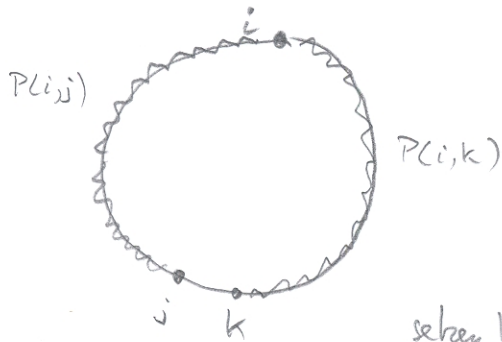
ohne Beweis

Bemerkung: Algorithmus 8.8 folgt dem Greedy-Prinzip
wähle in jeder Iteration einen kürzesten Kreis, der
orthogonal zu den bisherigen ist; für die
Orthogonalität ist der Vektor ξ_i der "Zenpe"

Anderer Ansatz (eher graphentheoretisch motiviert) beruht auf
folgendem Lemma

8.11 LEMMA: a) Knoten i ist auf einem Kreis C aus einer minimalen Kreisbasis \Rightarrow

C enthält eine Kante (i,j) so dass die Wege $W(i,j)$ und $W(i,k)$ entlang von C kürzeste Wege in G von i nach j bzw. i nach k sind



b) Sind alle $w_{e_i} > 0$, so enthält die Menge aller Kreise, die man aus C (beliebigen) kürzesten Wegen $P(i,j)$, $P(i,k)$ und Kante (j,k) zusammen setzen kann, eine minimale Kreisbasis

ohne Beweis \square

8.12 ALGORITHMUS (Herlau 27)

1. Berechne kürzesten Weg $P(i,j,k)$ zwischen je 2 Knoten j, k
2. Für jeden Knoten i und jede Kante (j,k) , konstruiere den Kreis $C(i,j,k) = P(i,j) + P(i,k) + (j,k)$ und berechne seine Länge (lasse dabei nicht-elementare Kreise weg)
3. Sortiere diese Kreise aufsteigend nach ihrer Länge, etwa C_1, C_2, \dots
4. Konstruiere eine Basis mit dem Greedyalgorithmus
 - 4.1. $B := \{C_1\}$
 - 4.2. solange $|B| < v$

wähle in der Reihenfolge C_2, C_3, \dots den kürzesten Kreis C , der linear unabhängig zu allen Kreisen aus B ist, setze $B := B \cup \{C\}$

8.13 SATZ (Herbon 87) Der Algorithmus konstruiert eine minimale Kreisbasis

Beweis: (1) Es konstruiert eine Basis

lin. unabh. klar.

in jede Kante $e \in E$ Kreis unter dem C_j und $e \in C_j$

\Rightarrow Basis

(2) minimale Basis

ergibt sich aus Greedy-Algorithmus und der linearen Unabhängigkeit allgemein:

(E, \mathcal{I}) und $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ heißt Matroid

$\Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{I}$

$A \subseteq B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$

$A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B| \Rightarrow \exists e \in B$ mit $A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

Beispiele: a) {kreisfreie Kantenmengen eines unger. Graphen} = \mathcal{I}

b) {Mengen von linear unabh. Vektoren aus einer endlichen Menge von Vektoren} = \mathcal{I}

Greedy Algorithmus für Matroide

1. sortiere Menge E aufsteigend: $w(e_1) < w(e_2) < \dots < w(e_m)$

2. $B := \{e_1\}$

3. solange $|B| < r$ (= Kardinalität einer \mathcal{I} -max. unabh. Menge, Basis von (E, \mathcal{I}) , alle haben gleiche Kardinalität)

wähle in Reihenfolge e_2, e_3, \dots das erste Element mit

$B \cup \{e\} \in \mathcal{I}$, setze $B := B \cup \{e\}$

Beim Ablauf ist B eine Basis von (E, \mathcal{Y}) mit minimalem Gewicht

Beweis: Sei $A = \{e_1, \dots, e_n\}$ die vom Algorithmus erzeugte unabhängige Menge

Sei $B := \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ eine Basis mit minimalem Gewicht, hier
aufsteigend sortiert bzgl. Gewicht w .

Sei r der erste Index mit $w(e_r) > w(f_r)$ (kein solcher $r \Rightarrow f = e$)

Dann gilt: $\{e_1, \dots, e_{r-1}\} \in \mathcal{Y}$, $\{f_1, \dots, f_r\} \in \mathcal{Y}$

$$|\{e_1, \dots, e_{r-1}\}| < |\{f_1, \dots, f_r\}|$$

$\Rightarrow \exists f \in \{f_1, \dots, f_r\}$ mit $\{e_1, \dots, e_{r-1}, f\} \in \mathcal{Y}$

\Rightarrow (Greedy) $w(e_r) \leq w(f) \leq w(f_r)$ } \Rightarrow Widerspruch \square

\uparrow Greedy \uparrow Sortierung

Aufwand:

n^2 Wegberechnungen $\approx O(n \log n)$

maximal $n \cdot m$ Kreise

Sortierung der Kreise $O(n \cdot m \cdot \log(n \cdot m)) = O(n \cdot m \log m)$

maximal $v \leq m$ Tests auf Unabhängigkeit

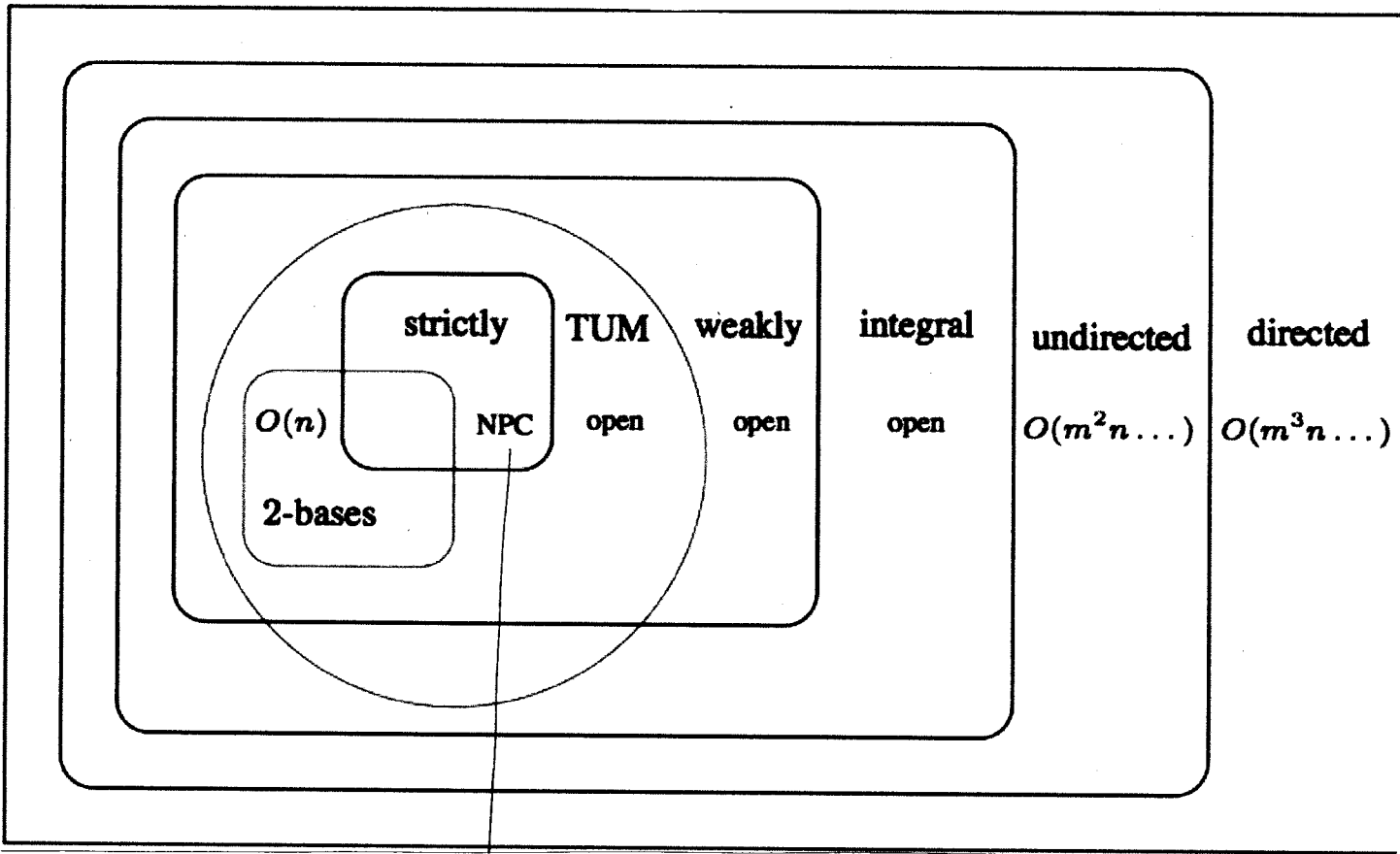
1 Test = Gauss-Elimination in $m \times v$ Matrix $\leq m^3$

$\Rightarrow O(m^4)$

verbesserbar auf $O(m^\omega \cdot n)$

\uparrow
schnelle Matrixmultiplikation, $\omega = 2,376$

8.3.2 Kurze Basen in anderen Klassen von Basen



sogar MAX-SNP - vollständig!