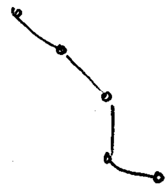
II Periodic Event Scheduling und Taktfahrplanoptimierung

§6 Das Periodic Event Scheduling Problem (PESP)

<u>Motivation aus Taktfahrplanung</u>

- haben Linien  = Folge von Stationen
- Suchen
  Ankunft und Abfahrzeiten an - Bahnhöfen
  - anderen wichtigen Punkten
- so dass zeitliche Nebenbedingungen eingehalten werden
- der Fahrplan sich <u>periodisch wiederholt</u>
- eine Zielfkt. minimiert wird (z.B. die <u>Umsteigewartezeit</u>) über alle Passagierströme

6.1 Kern des mathematischen Modells = PESP

Abschnitte entlang einer gerichteten Linie = Kanten eines Digraphen

$$i \longrightarrow j$$

π_i π_j

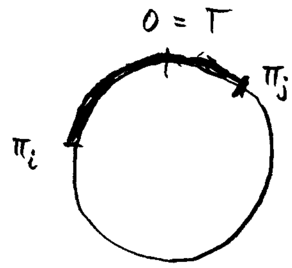
Ereignisse (Zeitpkt)

zeitliche Bedingungen an Zeitspanne zwischen π_i und π_j

$$\ell_{ij} \le \pi_j - \pi_i + p_{ij} T \le u_{ij}$$

ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T

liegt daran, dass sich die Ereignisse periodisch wiederholen, d.h. die Zeitachse ist ein <u>Kreis</u>



$$\pi_j - \pi_i + 1 \cdot T \in [l_{ij}, u_{ij}]$$

Graphentheoretisch:

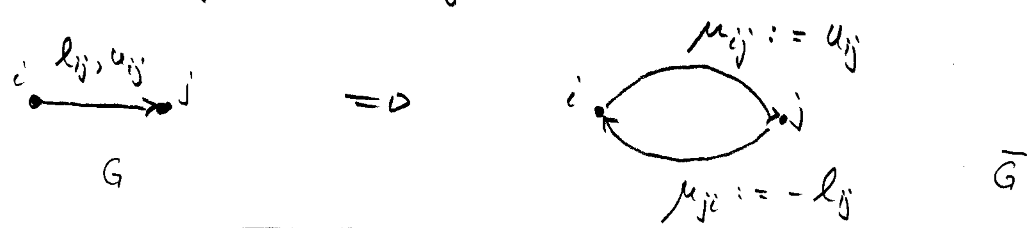
Zulässiges Potenzialproblem, aperiodischer Fall

Gegeben: Digraph G
Schranken l_{ij}, u_{ij} für jede Kante (i,j)

Gesucht: Potenzial π mit $\pi_j - \pi_i \in [l_{ij}, u_{ij}]$ "zulässiges Potenzial"

$\Downarrow$

Reduzierbar auf Kürzeste Wege-Problem



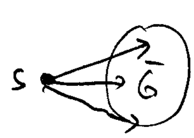
Claim: $\boxed{\pi \text{ ist zulässig} \iff \underbrace{\pi_j - \pi_i \le \mu_{ij} \text{ für alle Kanten } (i,j) \text{ in } \bar{G}}_{(*)}}$

Beweis: π zulässig $\iff l_{ij} \le \pi_j - \pi_i \le u_{ij} \quad \forall (i,j)$

$\iff \pi_j - \pi_i \le u_{ij}$ und $\pi_i - \pi_j \le -l_{ij}$ $\square$

6.1 SATZ: (1) $(*)$ ist erfüllt $\iff$ $\bar{G}$ hat keine Zykel negativer Länge

(2) Ist $(*)$ erfüllt, so erhält man ein zulässiges Potenzial π auf folgende Weise:



a) Führe Knoten s mit Kanten zu jedem v in $\bar{G}$ ein

b) $\pi(v) :=$ kürzeste Weglänge von s nach v

Beweis = AUFGABE 11

Zulässiges Potenzialproblem, periodischer Fall zur Taktzeit T

periodisches Potenzial mit Taktzeit T

ist Zahl π_i für jeden Knoten i

mit $\pi_i \in \{ \pi_i^0, \pi_i^0 \pm T, \pi_i^0 \pm 2T, \dots \}$ und $\pi_i^0 \in \{0, 1, \dots T-1\}$

zulässiges periodisches Potenzial bzgl T, l_{ij}, u_{ij}

ist ein periodisches Potenzial mit

$l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij}$ für alle Kanten (i,j)

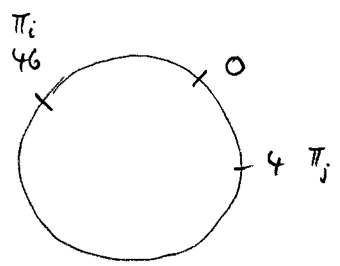
$\pi_j^0 + k_j \cdot T \qquad \pi_i^0 + k_i \cdot T \qquad k_i, k_j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Bedingung ist äquivalent zu

$$\boxed{l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij} \cdot T \leq u_{ij} \quad \text{und} \quad p_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall (i,j)}$$

Bsp:

$T = 60$ Min



$\pi_j - \pi_i \in [10, 20]$

algebraisch

$$\boxed{l \leq \Theta^T \pi - p \cdot T \leq u \quad , p \in \mathbb{Z}^A}$$

Schreibweise: $\pi_j - \pi_i \in [l_a, u_a]_T \; :\Leftrightarrow \; l_a \leq (\pi_j^0 - \pi_i^0) + p_a T \leq u_a$

für ein $p_a \in \mathbb{Z}$

• Def: $d \bmod T := \min \{ d + zT \geq 0 \, , \, z \in \mathbb{Z} \}$.

"Modulo Projektion" $\pi_i \mapsto \pi_i^0$

$(*) \Leftrightarrow \underbrace{(\pi_j - \pi_i - l_a) \bmod T}_{\substack{4 - 46 - 10 \\ 8}} \leq \underbrace{u_a - l_a}_{\substack{20 - 10 \\ 10}}$

Periodic Event Scheduling Problem PESP

Geg: Digraph D mit Kantenrestriktionen $\Delta_a = [l_a, u_a]$, Taktzeit T

Ges: Fahrplan (zulässiges periodisches Potential) π,

d.h. π erfüllt Bed. $(*)$ bzgl T

Beobachtung: **Jedes zulässige Potential ist zulässig periodisch!**

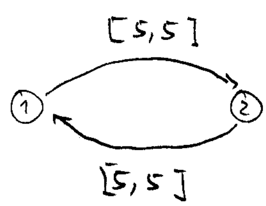
denn: Sei π zul. Potential bzgl Δ_a

$\Rightarrow \quad l_a \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a \quad$ für $a: i \longrightarrow j$

$\Rightarrow \quad l_a \leq (\pi_j^0 - \pi_i^0) + p_a T \leq u_a \quad$ für $p_a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad \pi$ ist zul. periodisches Potential $\square$

Die Umkehrung gilt nicht:



$T = 10$

$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ erfüllt $(*)$

$\nexists$ aperiodisches zulässiges Potential

Bed. $(*)$ zeigt:

$$\boxed{\text{zul. periodisches Potential} = \text{zul. Potential} + \text{Periodenoffsets } p_a \in \mathbb{Z},\ a \in A}$$

↑ einfach falls p_a gegeben!

$l_a \leq \pi_j - \pi_i + p_a \cdot T \leq u_a \iff l_a - p_a T \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a - p_a T$

↖ zulässiges Potentialproblem $\square$

alternative Formulierung des PESP über

<u>Spannungen</u> x_{ij} = Potenzialdifferenzen $\pi_j - \pi_i$

↑ Kantenvariable

↑ Knotenvariable

<u>periodische Spannung</u> = Spannung erzeugt von Potenzialdifferenz eines periodischen Potenzials π

d.h. $x_{ij} = \pi_j^0 + k_j T - (\pi_i^0 + k_i T)$ für geeignete k_i, k_j

<u>zulässige periodische Spannung</u> x

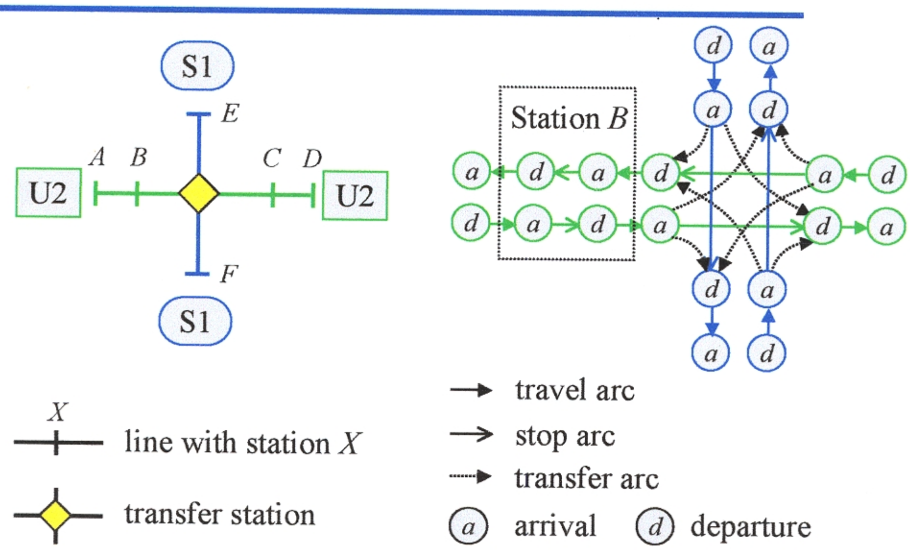
$\Leftrightarrow \quad l_{ij} \le x_a + p_a T \le u_{ij} \quad \forall$ Kanten $a = (i,j)$

---

später mehr dazu, wie man an einem x Vektor erkennt, ob er eine periodische Spannung ist

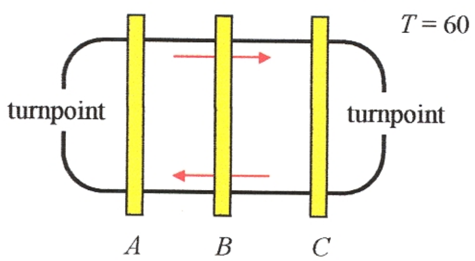
6.2 Modellierungsmöglichkeiten mit dem PESP

Traffic lines and graphs



Example: Temporal conditions on a single line

Beispiel 1



Stopping conditions in A

$\pi_{\text{dep in } A} - \pi_{\text{arr in } A} \in [2\,,\,4\,]_T$

xx:59 arr in A

xx:02 dep in A

Travel condition

$\pi_{\text{dep in } B} - \pi_{\text{arr in } A} \in [11\,,\,11\,]_T$

xx:48 dep in B

xx:59 arr in A

Turning condition

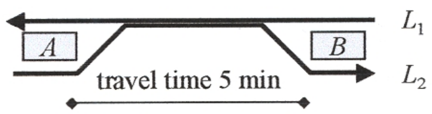
$\pi_{\text{dep in } A} - \pi_{\text{arr in } A} \in [5\,,\,10\,]_T$

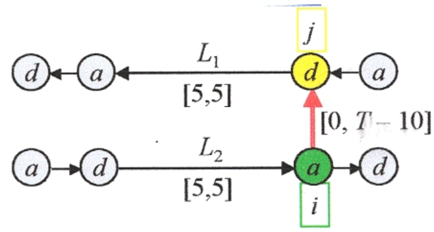
xx:02 dep in A

xx:10 arr in A

Eingleisige Streckenabschnitte

Beispiel 2

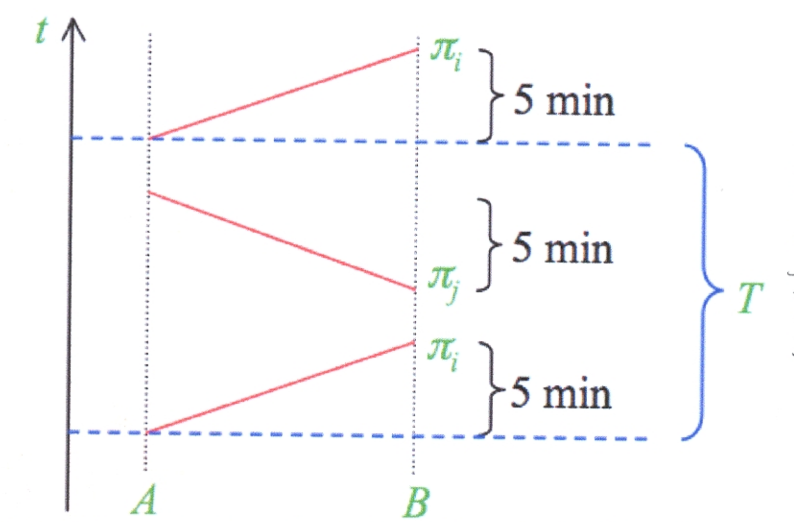




← modelliert Eingleisigkeit

Begründung:

Betrachte Weg-Zeit Diagramm



$\Rightarrow \pi_i + T \geq \pi_j + 2 \cdot 5$ (2)

$\Rightarrow \pi_j \geq \pi_i$ (1)

(1) $\Rightarrow 0 \leq \pi_j - \pi_i$ (2) $\Rightarrow \pi_j - \pi_i \leq T - 10$

$\Rightarrow \pi_j - \pi_i \in [0, T-10]_T$

Umkehrung: Sei $\pi_j - \pi_i \in [0, T-10]_T$

$\Rightarrow$ (Weg-Zeit-Diagramm) Züge können sich im Streckenabschnitt $\overline{AB}$ nicht treffen

Disjunktive Bedingungen — Beispiel 3

$\pi_j - \pi_i \in \Delta_T$ oder $\pi_j - \pi_i \in \Delta'_T$

$\pi_j - \pi_i \in \bar{\Delta}_T$ und $\pi_j - \pi_i \in \bar{\Delta}'_T$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{starke Modellierungsmöglichkeiten!}}$

Weitere Modellierungsmöglichkeiten:

- Zeit zwischen aufeinander folgenden Zügen
- Treffen an bestimmten Bahnhöfen zwecks Umsteigen
- Fixierte Ereignisse (Anschluss an andere Verkehrsmittel)
- # Fahrzeuge (indirekt über Fahrzeit entlang einer Linie)

$\Downarrow$

alles als zulässiges periodisches Potenzialproblem modellierbar

System von Ungleichungen in Knotenvariablen π_i

Ungleichungen entsprechen Kanten eines Graphen

haben Periodizitätsbedingung

Modellierung von Optimierungskriterien

Lineare Zielfunktion $\sum_a w_a \cdot x_a$

(1) gewichtete Summe der Umsteigezeiten

(2) Gesamtfahrzeit entlang Fahrkanten (bei festen Fahrzeiten $x_a \in [t_a, t_a]_T$)
$\hat{=}$ # Fahrzeuge

(1) und (2) sind gegenläufige Ziele!
daher meist nur (1) oder (2) mit Nebenbedingung an die jeweils andere in Form von PESP-constraints

$\Downarrow$

Man erhält MIP

$$\min \sum_a w_a x_a$$

$$\begin{aligned}
\text{unter}\quad & x_a = \pi_j - \pi_i \quad \forall\, a = (i,j)\\
& l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a \quad \forall\, a\\
& 0 \leq x_a \leq T-1\\
& p_a \text{ ganzzahlig},\ x_a, \pi_i \text{ reell}
\end{aligned}$$

sehr schwer lösbar, bereits bei kleinen Instanzen
2 Instanzen zu MIPLIB beigesteuert: timetab1 und timetab2
(10 ICE/IC Züge, 40 Umsteigebeziehungen)

=0 (nach preprocessing) $n = 56$ bzw. 88
$m = 226$ bzw 381

6.3 Komplexität des PESP

Das aperiodische zulässige Potenzialproblem ist in P
(folgt aus Satz 6.1)

6.2 SATZ: Das periodische zulässige Potenzialproblem ist stark NP-schwer, selbst für festes $T \geq 3$

[Nachtigall 96]

Beweis: Reduktion von <u>k-Färbbarkeit</u> von Graphen

Gegeben: ungerichteter Graph $G = (V,E)$

Frage: Kann G mit k Farben gefärbt werden?

Betrachte Instanz von k-Färbbarkeit.
Konstruiere PESP-Instanz wie folgt:

D = Digraph, der aus G durch beliebige Orientierung der Kanten von G entsteht

$a \in A(D) \rightarrow [l_a, u_a] := [1, T-1]$ mit $T := k$

Dann gilt:

π ist zulässiges periodisches Potenzial

$\Leftrightarrow \quad 1 \leq \pi_j - \pi_i + p_a \cdot T \leq T-1 \quad \forall a$

$\Leftrightarrow \quad \pi_i \neq \pi_j \mod T \quad \forall a$

$\Leftrightarrow \quad \pi_i \mod T$ definiert eine k-Färbung von G $\square$

Der Kern der NP-Vollständigkeit ist das Finden der Perioden-Offsets p_a.

Für gegebene p_a ist das Entscheidungsproblem in P

da $\ell_{ij} \le \pi_j - \pi_i + p_a T \le u_{ij}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\ell_{ij} - p_a T}_{\text{feste Zahl}} \le \pi_j - \pi_i \le \underbrace{u_{ij} - p_a T}_{\text{feste Zahl}}$$

entspricht aperiodischem zulässigen Potenzialproblem

Ebenso ist das MIP leicht, wenn die p_a bekannt sind

Entsprechendes gilt für

MAX-T-PESP

Gegeben: Digraph G mit ℓ_a, u_a für jede Kante a, $T \in \mathbb{N}$

Gesucht: Potenzial π mit

$$\ell_a \le \pi_j - \pi_i \le u_a \quad \forall\, a = (i,j) \in A'$$

mit $|A'|$ so groß wie möglich

6.3 SATZ: MAX-T-PESP ist für jedes $T \geq 2$ MAXSNP-vollständig

Beweis: Durch L-Reduktion von MAX-2-COLORING □