§ 5 Flows over time / Dynamische Flüsse

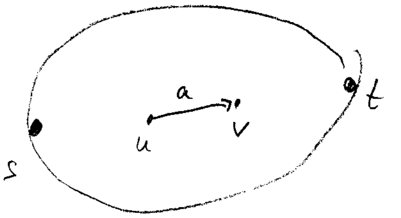
bisher: Rush Hour = statischer Fluss

d.h. in einem Zeitraum auf ganzem Weg P konstante Flussrate f_P

Modell nicht mehr zutreffend außerhalb der Rush hour

$\Rightarrow$ müssen zeitliches Verhalten des Flusses mit modellieren
wichtig auch für logistische Anwendungen

5.1 Maximale s,t Flüsse bei konstanten Fahrzeiten



Kante a hat Kapazität $u_a \in \mathbb{N}$

Zeit $\tau_a \in \mathbb{N}$

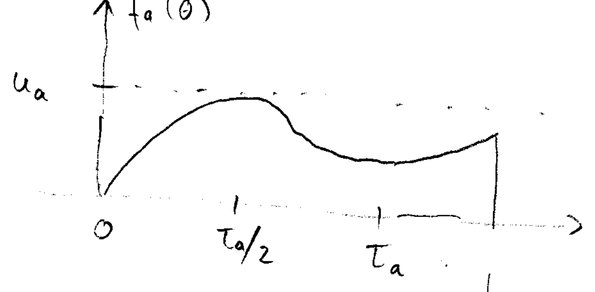
↑ benötigt zum Durchqueren der Kante

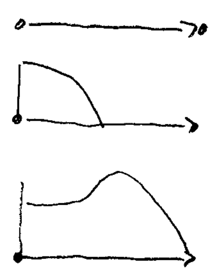
zusätzlich Zeithorizont T gegeben

<u>Dynamischer Fluss</u> f <u>mit Zeithorizont T</u>

= Funktionen $\underbrace{f_a : [0, T[\to \mathbb{R}^1_+}$ für alle Kanten $a \in A$

$f_a(\theta)$ = Flussrate in Kante a zum Zeitpkt θ





$\theta = 0$

$\theta = \frac{\tau_a}{2}$

$\theta = \tau_a$

→ "umgekehrtes Bild"

zur Zeit $\Theta \geq \tau_a$ kommt $f_a(\Theta - \tau_a)$ am Kopf der Kante an

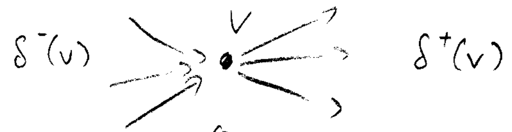
Ein <u>dynamischer Fluss mit Zeithorizont T</u> erfüllt

(1) die Kapazitätsbedingungen:

$$f_a(\Theta) \leq u_a \quad \forall \Theta \in [0, T[$$

Kapazitäten beschränken die Flussrate

(2) Flusserhaltungsgleichungen (kein Defizit an Knoten gestattet)



$$\sum_{a \in \delta^-(v)} \int_{\tau_a}^{\Theta} f_a(\xi - \tau_a)\, d\xi \geq \sum_{a \in \delta^+(v)} \int_0^{\Theta} f_a(\xi)\, d\xi \quad \forall \Theta$$

Einfluss bis Θ Ausfluss bis Θ

"$\geq$" $\hat{=}$ Warten in Knoten erlaubt

"$=$" $\hat{=}$ kein Warten erlaubt

(3) "$=$" muss gelten zum Zeitpkt T

und $f_a(\Theta) = 0$ für $\Theta > T - \tau_a$ (Fluss hat Netzwerk verlassen nach Zeit T)

Wert des zulässigen Flusses f:

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} \int_0^T f_a(\Theta)\, d\Theta - \sum_{a \in \delta^-(s)} \int_{\tau_a}^T f_a(\Theta - \tau_a)\, d\Theta$$

$$= - \sum_{a \in \delta^+(t)} \int_0^T f_a(\Theta)\, d\Theta + \sum_{a \in \delta^-(t)} \int_{\tau_a}^T f_a(\Theta - \tau_a)\, d\Theta$$

$=$ Nettoausfluss aus s $=$ Nettoeinfluss in t

Maximales dynamisches s,t-Fluss Problem

Gegeben: Digraph $G=(V,A)$, $s,t \in V$, u_a, τ_a, T

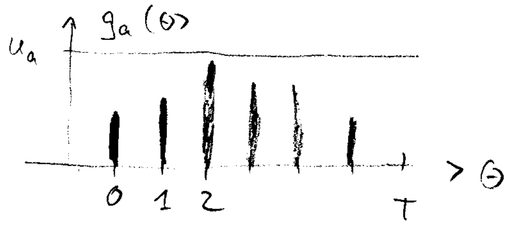
Gesucht: dynamischer s,t-Fluss f Zeithorizont T und maximalem Flusswert value(f)

Diskrete versus stetige Zeit:

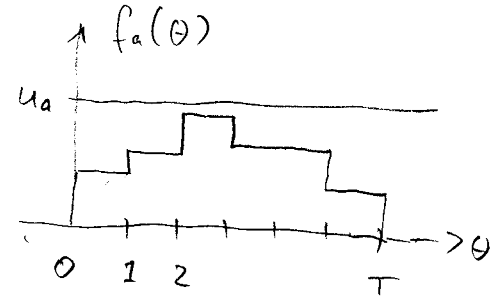
bisherige Definition nutzt stetige Zeit

diskrete Zeit $\hat{=}$ sende Fluss nur zu Zeitpkt. $0, 1, 2, \ldots$

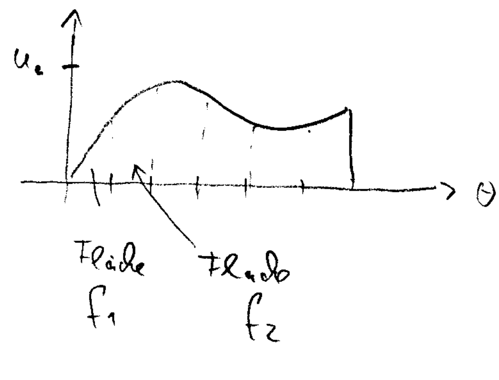
diskreter Fluss g



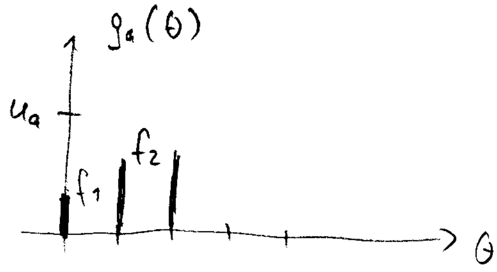
$\xrightarrow{\text{Transformation}}$ in stetigen Fluss



stetiger Fluss $f_a(\theta)$



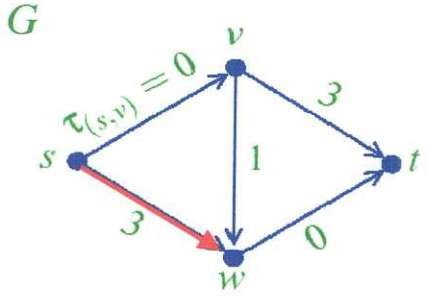
$\xrightarrow{\text{Transformation}}$ in diskreten Fluss



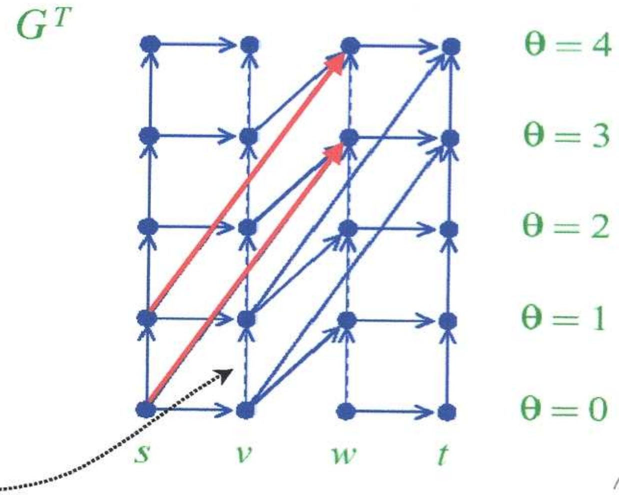
Beobachtung: Bei hinreichend feiner Diskretisierung der Zeit kann jeder diskrete dynamische Fluss als stetiger dynamischer Fluss interpretiert werden und umgekehrt (genau bis auf beliebig kleinen Approximationsfehler bei "vernünftiger" f_a)

Time expanded networks

Observation. Discrete flows over time in G correspond to static flows in time-expanded networks G^T (for constant τ_a)



Example: $T = 5$.

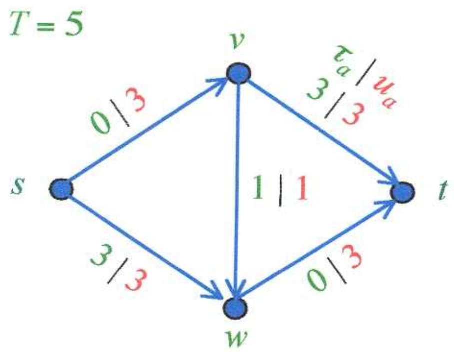


waiting in a node

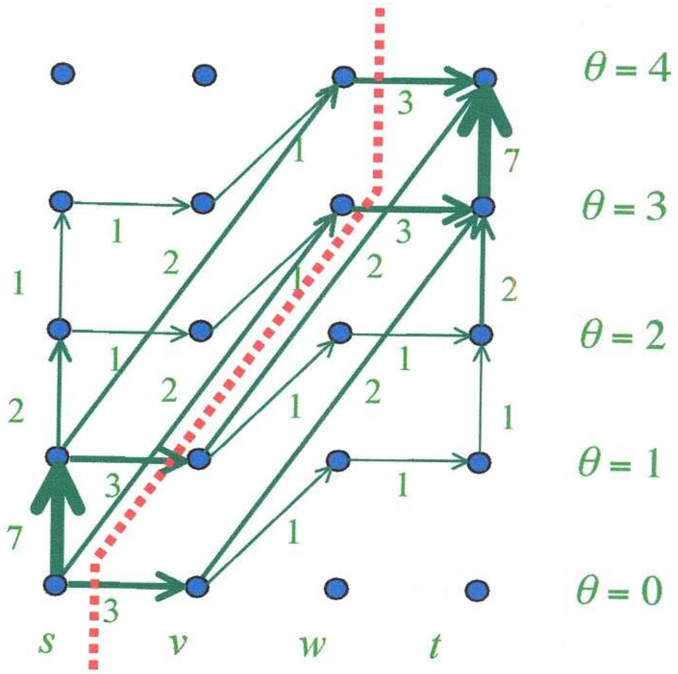
Kopie von G für jede Zeitschicht

Kanten zwischen verschiedenen Zeitschichten entsprechend τ_a

A static flow in the time expanded network



$|f| = 12$



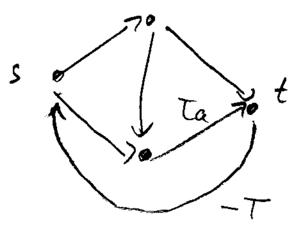
Vorteil diskreter dynamischer Flüsse: Beschreibung über zeitexpandierte Netze möglich

- max s,t-dynamischer Fluss mit Zeithorizont T
  $\hat{=}$ max s,t-statischen Fluss in G^T
- statische Flusstheorie im Prinzip anwendbar (z.B. max Fluss - min Cut)
- ABER G^T riesig bei feinen Zeitskala
  in G^T polynomiale Algorithmen sind bzgl G
  nur pseudopolynomial

<u>Der Algorithmus von Ford-Fulkerson für max dyn. s,t-Flüsse [1958]</u>

Grobe Idee:

1) Berechne statischen min-cost Fluss x in $G+(t,s) =: \bar{G}$



d.h. Zielfkt $\sum_{a \in A} \tau_a x_a - T \cdot value(x)$

$\hat{=}$ min-cost Zirkulation, da alle Balancen $b(v) = 0$

[geht in polynomialer Zeit mit Methoden aus ADM I]

2) Wähle beliebige Pfaddekomposition x_P, $P \in \mathcal{P}$ (= Menge der s,t Pfade) von x bzgl. $\bar{G}$

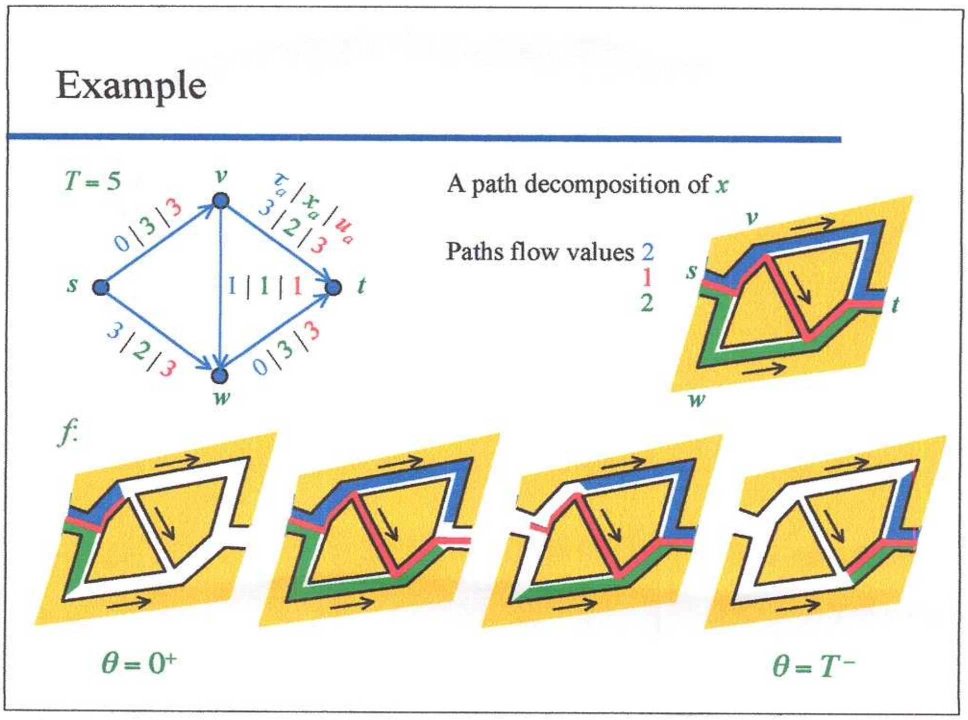
[Standardzerlegung aus ADM I von x in $G+(t,s)$
ergibt gerichtete Kreise, nehme nur die, die (t,s) enthalten,
dies definiert s,t Wege; möglich in polynomialer Zeit, ADM I]

3) Nutze die Pfade zur Konstruktion eines zeitlich wiederholten Flusses f

f schickt Fluss mit der konstanten Rate x_P entlang P

im gesamten Intervall $[0, T - \tau_P]$

letzter Zeitpunkt zum Senden bei s, so dass Fluss spätestens zur Zeit T in Senke t ankommt



4) Dies ergibt einen dynamischen s,t-Fluss f mit Zeithorizont T

Die Flussraten $f_a : [0, T[\to \mathbb{R}$ ergeben sich polynomiell aus den maximal m Wegraten f_P und Zeiten τ_a

Jede Flussrate ist eine stückweise konstante Fkt mit maximal m Sprüngen

$\Rightarrow$ alle Flussraten haben Outputgröße polynomiell in der Inputgröße und können in polyn. Zeit konstruiert (werden)

Zulässigkeit des zeitlich wiederholten Flusses f

- Flusserhaltung trivial, f erfüllt sie mit "=", d.h. keine Speicherung von Fluss in Knoten
- Kapazitätserhaltung:

$$f_a(\theta) \le \sum_{P: a \in P} x_P = x_a \le u_a$$

- Nach Zeit T ist das Netzwerk leer, da auf P der letzte Fluss zu Zeit $T - \tau_P$ geschickt wird

Wert des zeitlich wiederholten Flusses f

$$\text{value}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} (T - \tau_P) x_P = T \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_P x_P$$

$$= T \, \text{value}(x) - \sum_{P \in \mathcal{P}} \left(\sum_{a \in P} \tau_a \right) x_P$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \left(\sum_{P \ni a} x_P \right) \tau_a$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a$$

= negative der Zielfunktion $\sum_{a \in A} \tau_a x_a - T \cdot \text{value}(x)$ für das min-cost-Zirkulationsproblem

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$f$ maximiert den Flusswert über alle zeitlich wiederholten dynamischen s,t-Flüsse mit Zeithorizont T}}$

Insbesondere ist $\tau_P \le T \quad \forall P$

Optimalität:

Nutzt max-flow min-cut auch im dynamischen Fall

Def.: <u>dynamischer s,t-Schnitt mit Zeithorizont T</u>

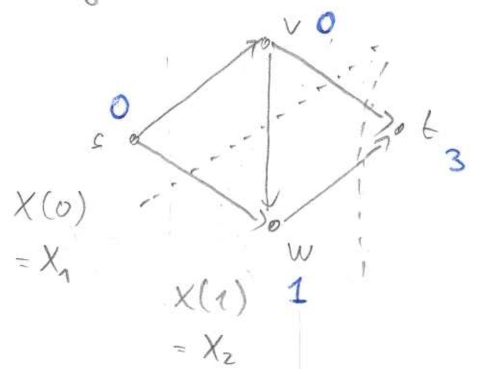
ist gegeben durch Werte $\pi(v) \in [0, \infty[$ für $v \in V$ mit $\pi(s) = 0$, $\pi(t) \geq T$.

Diese Werte definieren eine aufsteigende Folge $\mathcal{C}$ von Mengen

$$S(\Theta) := \{ v \in V \mid \pi(v) \leq \Theta \}$$

so dass für $\Theta \in [0, T[$ $\quad X(\Theta), V - X(\Theta)$ einen s,t Schnitt definiert

Die Folge hat nur endlich viele verschiedene Mengen $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_k$



$\pi(s) = 0$

$\pi(v) = 0$

$\pi(w) = 1$

$\pi(t) = 3 = T$

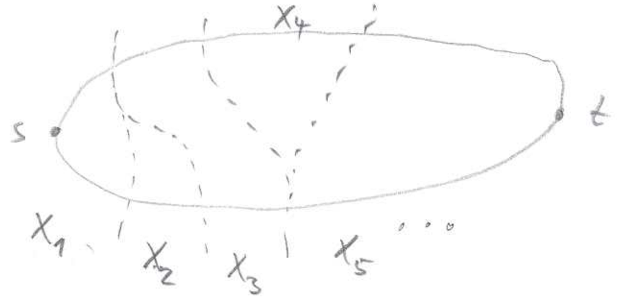
Die <u>Kapazität</u> eines solchen Schnittes $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$\mathrm{cap}(\mathcal{C}) := \sum_{\substack{a \in A \\ a = (v,w)}} \underbrace{\max \{ \underbrace{\pi(w) - \pi(v)}_{\substack{\text{Zeit, die} \\ \text{a im dyn.} \\ \text{Schnitt ist}}} - \tau_a, 0 \}}_{\substack{\text{maximale Zeitspanne} \\ \text{mit der Fluss aus} \\ \text{Kante a rausfließen} \\ \text{konnte, während a im Schnitt ist}}} \cdot \underbrace{u_a}_{\substack{\text{Schranke} \\ \text{für die} \\ \text{Flussrate}}}$$

5.1 LEMMA: Für jeden dyn. s,t-Fluss f und jeden dyn. s,t-Schnitt $\mathcal{C}$ zum selben Zeithorizont T gilt

$$\text{value}(f) \leq \text{cap}(\mathcal{C})$$

Beweis: Betrachte die Folge der Schnitte $X_1, X_2, \dots, X_k$ zu $\mathcal{C}$



Jeder Schnitt X_i erzeugt Kantenmenge $\delta^+(X_i)$ (Kanten raus aus X_i)

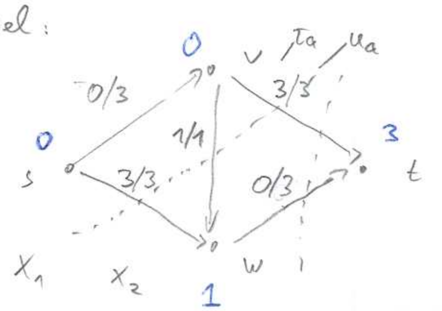
Das Zeitintervall $[0, T[$ wird durch die "Gültigkeit" der Schnitte überdeckt

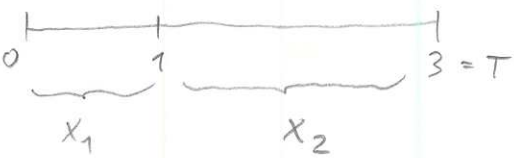
d.h. $\Theta_i = \max\{\pi(v) \mid v \in X_i\}$

$\Rightarrow$ $\text{value}(f) \leq \sum_i$ Flussmenge über Kanten $\delta^+(X_i)$, die im Zeitintervall $[\Theta_i, \Theta_{i+1}]$ fließen kann

$$\leq \sum_{\substack{a \in A \\ a=(v,w)}} \max\{\pi(w) - \pi(v) - \tau_a, 0\} \cdot u_a = \text{cap}(\mathcal{C}) \quad \square$$

Beispiel:





maximal 0

maximal 2 Zeiteinheiten à 3 Flusseinheiten über (w,t) $= 6$

$cap(\mathcal{C})$: $(s,v) \to \pi(v) - \pi(s) - \tau_a = 0-0-0 \to$ kein Beitrag
$(s,w) \to 1-0-3 \to$ kein Beitrag
$(v,w) \to 1-0-1 \to$ kein Beitrag
$(v,t) \to 3-0-3 \to$ kein Beitrag
$(w,t) \to 3-1-0 \to 2 \cdot 3 = 6$

Zum Beweis der Optimalität des zeitlich wiederholten Flusses f konstruiert man aus f einen dynamischen s,t Schnitt $\mathcal{C}$ mit $value(f) = cap(\mathcal{C})$

Konstruktion des Schnittes aus Fluss f

Setze $\pi(v) :=$ Länge eines kürzesten Weges von s nach v im Residualgraph $(G+(t,s))_x = \bar{G}_x$ bzgl. Kosten τ_a

$\boxed{\text{definiert dynamischen } s,t\text{-Schnitt } \mathcal{C}}$ da

$\pi(s) = 0$ ($\bar{G}_x$ enthält keinen negativen Zykel)

$\pi(t) \geq T$ (sonst gibt es in G_x einen s,t Weg mit Länge $< T$
$\Rightarrow$ $\bar{G}_x$ hat negativen Zykel
Widerspruch, da x Kosten-minimal)

Beachte: Da Kante $(s,t) \in \bar{G}_x$ folgt $\boxed{\pi(t) = T}$

Beweis: $value(f) = cap(\mathcal{C})$

Betrachte Kante $a = (v,w)$

<u>Claim 1</u>: $\boxed{\begin{array}{l} [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[\; \neq \emptyset \\ \Rightarrow \quad x_a = u_a \,, \quad f_a(\theta) = u_a \quad \forall\, \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[\end{array}}$

Beweis: a) Annahme $x_a < u_a$

$\Rightarrow (v,w) \in \tilde{G}_x \quad \Rightarrow \quad \pi(w) \leq \pi(v) + \tau_a \quad \Rightarrow$ Intervall ist leer Widerspruch

↑ kürzeste Weglängen

b) Annahme: $\exists\, \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$ mit $f_a(\theta) < u_a \; (= x_a)$

$\Rightarrow \exists$ Weg P_0 in Pfadzerlegung zu x mit $a \in P_0$ und

(i) der erste Fluss entlang P_0 kommt in v nach Zeit $\pi(v)$ an

(wenn auf allen Wegen durch a der Fluss in v bereits zu $\pi(v)$ ankommt, gilt $f_a(\pi(v)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a$)

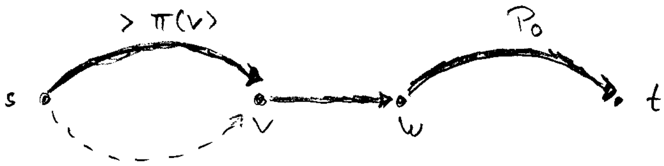
oder

(ii) der letzte Fluss durch P_0 verlässt w vor $\pi(w)$

(sonst $f_a(\pi(w)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a$)

Da f zeitlich wiederholt, muss (i) oder (ii) gelten

zu (i)



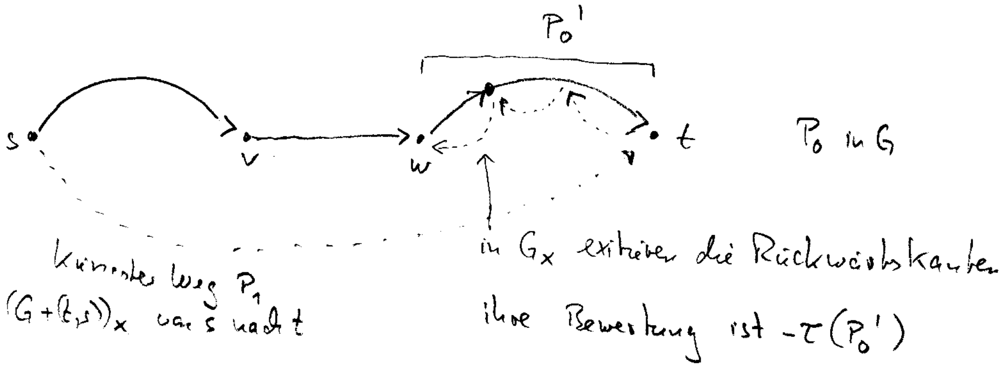
P_0 in G

↑ Weg im Residualgraph G_x mit Länge $\pi(v)$, existiert nach Def (von $\pi(v)$)

nutze diesen Weg zum Umrouten von Fluss von P_0

$\Rightarrow T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a x_a$ wird größer

$\Rightarrow$ Widerspruch zu x maximal zu (ii)



Fluss entlang P_0 verlässt w vor $\pi(w)$

$\Rightarrow$ (da man bis zum letzten Moment entlang P_0 schickt)

$$\pi(w) + \tau(P_0') > T = \pi(t) \qquad (*)$$

Betrachte Weg P_1 + Rückwärtskanten zu P_0' von s zu w

Dies ist Weg in G_X mit Länge (Kosten)

$$\pi(t) - \tau(P_0') \overset{(*)}{<} \pi(t) + \pi(w) - \pi(t) = \pi(w)$$

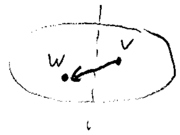
Widerspruch dazu, dass $\pi(w)$ Länge eines kürzesten Weges bis w in $\bar{G}_X$ ist $\square$

Claim 2: $\boxed{[\pi(w) - \tau_a, \pi(v)[\neq \emptyset \Rightarrow x_a = 0, \ f_a(\theta) = 0 \ \forall \theta}$

Beweis: Falls $x_a > 0 \Rightarrow$ Kante (w,v) ist in $\bar{G}_X$

$\Rightarrow \pi(v) \leq \pi(w) - \tau_a$ Widerspruch $\square$

Claim 2 $\Rightarrow$ f kreuzt keinen Schnitt auf Rückwärtskanten



$\Rightarrow$ nur auf Vorwärtskanten

$\Rightarrow$ (Claim 1) $f_a(\theta) = u_a \quad \forall \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$

$\Rightarrow$ value(f) = cap(C) $\square$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{5.2 SATZ (Ford-Fulkerson 58)}}$

5.2 SATZ (Ford-Fulkerson 58). (1) Der Algorithmus konstruiert einen optimalen dyn. s,t-Fluss zum Zeithorizont T.

(2) Die Laufzeit wird dominiert durch die Berechnung des statischen min-cost Flusses x

(3) Der optimale dynamische Fluss ist zeitlich wiederholt und kommt ohne Speicherung in Knoten aus

alternatives Beweis für Optimalität über Dualitätstheorie

Min Cost Flow Problem als LP formulieren (P)

Duales formulieren (D)

zeigen, dass value(f) $\geq$ OPT(P)

value(f) $\leq$ OPT(D)

$\boxed{\text{AUFGABE 9}}$

5.2 Komplexität von dynamischen Flussproblemen mit konstanten Fahrzeiten τ_a

The complexity landscape of network flows

	s-t flow	trans-shipment	min-cost	quickest multi-commodity
static	poly		poly	poly (LP)
over time	poly (static min-cost flow)	poly (minimize submodular functions)	pseudo-poly NP-hard	pseudo-poly (LP) NP-hard

[Ford & Fulkerson 1958]
[Hoppe & Tardos 2000]
[Klinz & Woeginger 1995]
[Fleischer & Skutella 2002/03]
FPTAS

Hier nur: 2-Approximation für quickest multi-commodity flows

Gegeben: Digraph G mit Quellen-Senken Paaren (s_i, t_i) und Demand d_i

Gesucht: beste Zeit T in der aller Demand durch dynamischen Fluss geroutet werden kann

(erste Annäherung an Verkehrssituation)

pseudopolynomial lösbar durch Zeitexpansion

Für Approximation betrachte:

statischen Durchschnittsfluss x zu dynamischen Fluss f mit Horizont T

def. durch $x_a := \frac{1}{T} \int_0^T f_a(\theta)\, d\theta$

5.3 LEMMA: Der statische Durchschnittsfluss x zu f erfüllt Kapazitätsbed. und Flusserhaltung (d.h. ist Fluss).
Ferner gilt $\text{value}(x) = \frac{1}{T}\,\text{value}(f)$, $c(x) = \frac{1}{T}\,c(f)$

Beweis: $f_a(\theta) \leq u_a \;\; \forall \theta$ $\Rightarrow$ Kapazitätsbed.

$$\Rightarrow x_a \leq \frac{1}{T}\int_0^T u_a \, d\theta = u_a$$

Flusserhaltung: Am Ende von T muss f die Flusserhaltung mit "=" erfüllen

$$\Rightarrow \sum_{a \in \delta^-(v)} \underbrace{\int_{\tau_a}^T f(\theta - \tau_a)\, d\theta}_{= \frac{1}{T} x_a} = \sum_{a \in \delta^+(v)} \underbrace{\int_0^T f_a(\theta) d(\theta)}_{\frac{1}{T} x_a}$$

Flusswert

Analog zu Flusserhaltung

Kosten:

$$c(f) = \sum_{a \in A} \int_0^T f_a(\theta) \cdot c_a \cdot d\theta = \sum_{a \in A} c_a \, T x_a = T c(x) \quad \square$$

5.4 LEMMA: Der statische Durchschnittsfluss x zu f mit Zeithorizont T ist längenbeschränkt mit Schranke T, d.h. es gibt eine Pfadzerlegung für jedes s_i, t_i mit $\tau_P \leq T$ für alle Pfade in der Zerlegung

Beweis: Nutze die Wege bzgl f, diese erfüllen $\tau_P \leq T$ $\square$

Algorithmus zur Konstruktion eines schnellsten Multi-Commodity Flusses, der die demands erfüllt, mit Kosten $\leq c$ (c Input)

[Fleischer & Skutella 2002]

(1) Errate den optimalen Zeithorizont T^* (binäre Suche)

(2) Berechne einen T^*-längenbeschränkten statischen MC-Fluss $(x_P)_{P \in \mathcal{P}}$ mit (später, wie)

$$\text{value}(x) = \frac{1}{T^*} d \quad \text{und} \quad c(x) \leq \frac{1}{T^*} c$$

(3) Konstruiere aus x einen dynamischen Fluss f indem entlang $P \in \mathcal{P}$ ein zeitlich wiederholter Fluss mit Raten x_P im Zeitraum $[0, T^*[$ losgeschickt wird

(4) Warte bis aller Fluss in den Senken angekommen ist

5.5 SATZ (Fleischer & Skutella 02)

f ist ein dynamischer Fluss mit Zeithorizont $\leq 2T^*$, der alle Demands erfüllt und Kosten $\leq c$ hat

Beweis: Flusserhaltung, Kapazitätsbed. klar
Keine Speicherung von Fluss in Knoten

$$\text{value}_i(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}_i} T^* \cdot x_P = T^* \text{value}_i(f) = d_i \quad \text{für Knotenpaar } (s_i, t_i)$$

$$c(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} c_P \cdot T^* x_P = \sum_{P \in \mathcal{P}} \Big(\sum_{a \in P} c_a \Big) T^* \cdot x_P$$

$$= T^* \cdot \sum_{a \in A} c_a \sum_{P \ni a} x_P = T^* \sum_{a \in A} c_a x_a = T^* c(x) \leq C$$

Zeitbeiwert klar, da $\tau_P \leq T^*$ □

Offener Punkt: Konstruktion des T^*-längenbeschränkten MC Flusses in Schritt (2) bzw. Feststellung, dass keiner existiert (bzgl. der binären Suche nach T^*)

Ist schwach NP-vollständig, enthält CSP als Spezialfall

ABER: es gibt ein FPTAS wie für CSP

d.h. Falls es einen T-längenbeschränkten statischen Fluss x gibt, so kann man einen $(T+\varepsilon)$-längenbeschränkten Fluss x' konstruieren mit Kosten $c(x') \leq c(x)$ in polynomialer Zeit in der Inputgröße und $\frac{1}{\varepsilon}$

Idee: Formuliere das Finden eines T-längenbeschränkten Flusses x als LP in Pfad Variablen
$\Rightarrow$ das duale Separierungsproblem ist ein CSP
nutze Äquivalenz von Separierung und Optimierung ADM II

AUFGABE 10

Volles PTAS für das Ausgangsproblem durch Kondensieren des zeitexpandierten Netzwerkes, d.h. Skalierung so dass T/Δ polynomial ist, Fahrzeiten runden

Löse statisches Flussproblem in kondensierten Graphen (polynomial)

Interpretiere Lösung als dynamischen Fluss mit ursprünglichen Fahrzeiten

↑

muss "glätten" um Kapazitäten einzuhalten

5.6 SATZ (Fleischer & Skutella 03)
Wählt man $\Delta := \varepsilon^2 T / n$, so erhält man ein kondensiertes zeitexpandiertes Netzwerk mit n/ε^2 Zeitscheiben, das $(1+\varepsilon)$-approximative schnellste kategorisierte Flüsse mit beschränkten Kosten liefert

Quintessenz: Dynamik kostet Faktor $|V|/\varepsilon^2$ bzgl. Netzwerkgröße

5.3 Dynamische Flussprobleme mit flussabhängigen Fahrzeiten τ_a

Sehr schwierig exakt zu behandeln

In Praxis daher meist Simulation

↑ ausgefeiltes Fahrverhalten
spätlich, Sonntagsfahrer, ...

Ein Grund für die Schwierigkeit:

- kein zeitexpandierter Graph G^T

↑ basiert auf festen Fahrzeiten
d.h. G^T würde sich dauernd ändern im dynamischen Fall

in COGA: 2 vereinfachte Modelle

1) Einfluss-abhängige Fahrzeiten (Köhler, Langkau, Skutella)

2) Last-abhängige Fahrzeiten (Köhler, Skutella)

zu 1)

- $x_a(\theta)$:= Flussrate zum Zeitpkt θ rein in die Kante a
- Fluss der Kante a zum Zeitpkt θ betritt benötigt $\tau_a(x_a(\theta))$ Zeit zum Durchfahren der Kante
- alle diese Flusseinheiten haben dieselbe Fahrzeit, die also nur vom Eintrittszeitpunkt θ abhängt

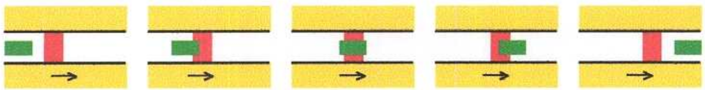
zu 2) • $y_a(\theta)$:= Flussmenge auf Kante a zum Zeitpkt θ

- Flusseinheiten auf a fahren zum Zeitpkt θ mit Geschwindigkeit $1/\tau_a(y_a(\theta))$

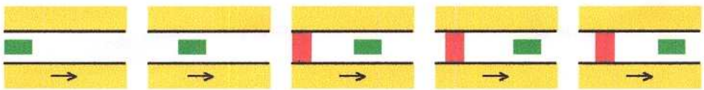
- zu jedem Zeitpkt Θ haben alle Flusseinheiten auf a dieselbe Geschwindigkeit (die ändert sich jedoch mit Θ)

Beide Modelle haben eine gewisse Praxisferne

Inflow dependent model: does not satisfy First-In First-Out property



Load dependent model: later arriving flow influences earlier flow



ABER: • man kann in ihnen optimieren

- Routen aus der Optimierung zeigen sich in der Simulation den aus der Simulation ermittelten Routen überlegen
(laufende Diplomarbeit Torben Edelhoff)

Ergebnisse in der Übersicht:

zu 1) Einfluss-abhängige Fahrzeiten

- schnellste s,t Fluss Problem ist stark NP-schwer
- schnellste s,t Fluss Problem hat einfache $(2-\varepsilon)$-Approximation mit zeitlich wiederholten Flüssen
- ausbaubar zu Approximationsschema (FPTAS)
(allerdings mit unschönen Flüssen)

zu 2) Last-abhängiges Modell

- $(2+\varepsilon)$-Approximation mit zeitlich wiederholten Flüssen für schnellste s,t-Fluss Problem
- Problem ist APX-schwer, daher kein Approximationsschema (außer P = NP)

Approximationsresultat zu 1:

Betrachten schnellstes s,t-Fluss-Problem mit Einfluss-abhängigen Fahrzeiten

A: Schnellstes s,t-Fluss-Problem mit konstanten Fahrzeiten

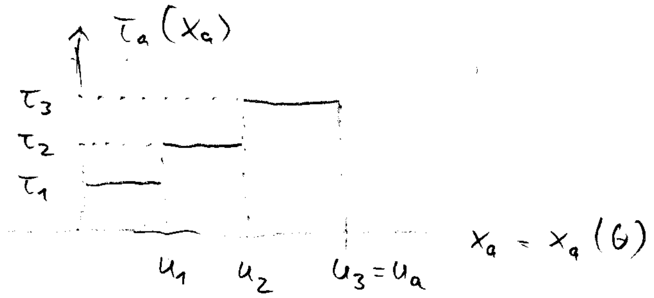
Nutze binäre Suche bzgl Zeithorizont T und löse für jedes T ein maximales dynamisches s,t-Fluss-Problem gemäß § 5.1

Problem: optimaler Zeithorizont muss nicht ganzzahlig sein
$\Rightarrow$ nur ε-Approximation durch binäre Suche möglich

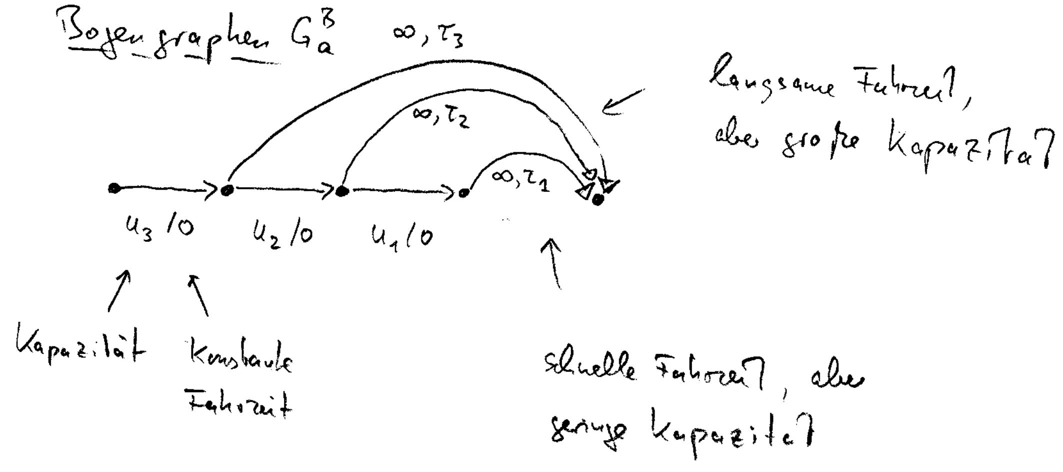
ABER (Fleischer & Tardos 98):
Alle τ_a und Demand d gzz
$\Rightarrow$ optimaler Zeithorizont ist rationale Zahl p/q mit $q \leq$ Wert eines minimalen s,t-Schnittes
$\Rightarrow$ exakte binäre Suche in polynomialer Zeit möglich

5.7 SATZ: Für das schnellste s,t-Fluss-Problem mit konstanten Fahrzeiten existiert ein optimaler Fluss, der zeitlich wiederholt ist, und ein solcher kann in polynomialer Zeit ermittelt werden

B. Schnellster s,t-Fluss Problem mit stückweise konstanten



1. Konstruiere für jede Kante a aus der Funktion $\tau_a(x_a)$ einen Bogengraphen G_a^B



2. Ersetze jede Kante a durch ihren Bogengraphen und ermittle im resultierenden Graphen G^B einen schnellsten s,t Fluss f^B gemäß A

- geht, da alle Fahrzeiten konstant
- ergibt einen Zeithorizont $T^B \leq T^{OPT}$ da jeder Fluss in G zulässig in G^B ist,

(i. A. gibt es aber mehr Fluss in G^B, da ein Fluss entlang Kante a in G gebt mit mehreren Geschwindigkeiten in G^B_a reisen kann)

- Kanten in G^B_a sind von unten nach oben gesättigt (sonst lässt sich Fluss nach unten verschieben und die Fahrzeit verbessern)

- f^B ist zeitlich wiederholt in G^B (aber i. A. nicht zulässig in G)

3. Konstruktion eines in G zulässigen (zeitlich wiederholten) Flusses aus f^B

f^B wurde aus Max. dyn. s,t-Fluss zum Zeithorizont T^B gewonnen
↑
letztes T bzgl. binäre Suche

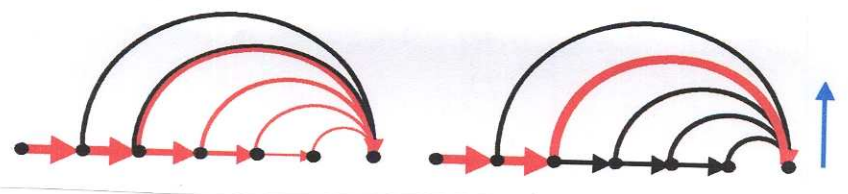
S.1
$\Rightarrow$ f^B wurde zeitlich wiederholt aus statischem Fluss x^B in G^B gewonnen

- reroute x^B so dass er nicht mehrere Bögen in G^B_a benutzt.

dazu: schiebe allen Fluss in G^B_a auf den höchsten Fluss-führenden Bogen

der resultierende statische Fluss sei x

$\Rightarrow$ x lässt sich als Fluss in G interpretieren



- x ist klarerweise ein statischer Fluss (Flusserhaltung usw) in G
- x nutzt nur Wege, die auch in x^B genutzt werden
  $\Rightarrow$ Länge dieser Wege ist $\leq T^B$

- Nutze diese Wege (in G interpretiert) zur Konstruktion eines zeitlich wiederholten Flusses f
  - sende zeitlich wiederholt entlang der Wegzerlegung von x
  - bis zum Zeithorizont T', der so gewählt wird dass bei T' der Demand d in t angekommen ist,
    also $\text{value}(f) = \underbrace{\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \cdot (T' - \tau_P)} = d$

$$= T' \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a$$

T' einfach ermittelbar

> **5.8 SATZ:** f löst das schnellste dynamische s,t-Flussproblem mit stückweise konstanten Fahrzeiten in einer Zeit
>
> $$T' \leq 2 \cdot T^{OPT}$$

Beweis: sei $\text{value}(T) :=$ Wert von f bei Zeithorizont T

$$= T \, \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a$$

Es reicht zu zeigen: $\text{value}(2T^{OPT}) \geq d$

$$\text{value}(2T^{OPT}) \geq \text{value}(2T^B) = 2T^* \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a$$

value(...) ist monoton in T

opt. Wert von f^B

$$= 2T^B \text{value}(x) - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_P x_P$$

$$= T^B \text{value}(x) + T^B \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_P x_P$$

$$= T^* \text{value}(x) + \sum_{P \in \mathcal{P}} \underbrace{(T^B - \tau_P)}_{\geq 0 \text{ da } \tau_P \leq T^B} x_P^B$$

$$\geq T^* \text{value}(x)$$

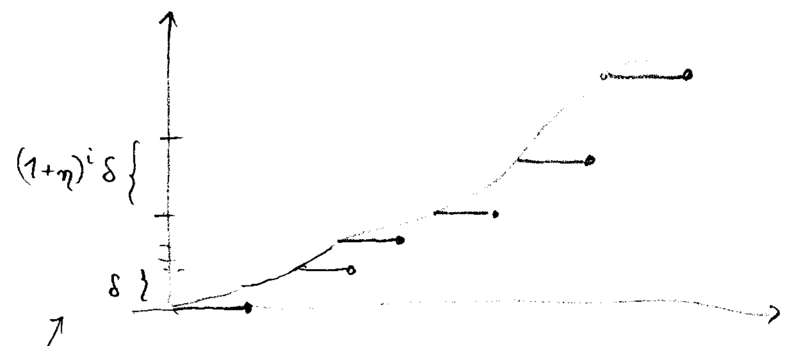
$$= T^* \text{value}(x^B)$$ da x aus x^B gewonnen durch Rerouting

$$\geq T^* \text{value}(x^B) - \sum_{a \in A^B} \tau_a \cdot x_a^B$$

$$= \text{value}(f^B) = d$$ □

C. Schnellstes s,t - Fluss - Problem mit beliebigen (monotonen, linksseitig stetigen) Fahrzeitfunktionen

Approximation solcher Fahrzeitfkt. durch stückweise konstante Fkt. τ^*



wie bei Fließkomma Zahlen

$$\tau^*(x) \le \tau(x) \le (1+\eta)\,\tau^*(x) + \delta \quad \forall x$$

$$\#\ \text{Konstanz-Stücke} \le \left\lceil \log_{(1+\eta)} \frac{\tau_a(u_a)}{\delta} + 1 \right\rceil$$

$\Downarrow$

$2+\varepsilon$ Approximation für beliebiges $\varepsilon > 0$

$(3/2 + \varepsilon)$ Approximation für konkave Fahrzeiten

AUFGABE 10