I Verkehr und Flüsse

§1 Das Basismodell für statischen Verkehr

1.1 Grundlagen

Rushhour $\Rightarrow$ statisches Bild für einige Stunden

$\Rightarrow$ Standardflussmodelle anwendbar

x_a = Flussmenge / Zeiteinheit auf Kante (arc) a

Digraph $G = (V, A)$ modelliert Straßennetz $\quad A$ = arcs

($|E| \approx 30.000$ in Berlin)

Start - Ziel Knotenpaare (s_k, t_k) $\quad k \in C$ ("Commodities")

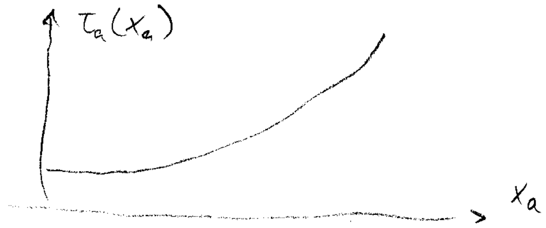
mit Demand d_k = Flussmenge

Fluss zwischen s_k, t_k kann sich beliebig aufteilen

(stetiger Fall, sinnvoll wenn d_k groß)

Interaktion zwischen verschiedenen (s_k, t_k) durch Congestion (Stau)

Fluss x_a auf Kante a verursacht eine flussabhängige Fahrzeit $\tau_a(x_a)$

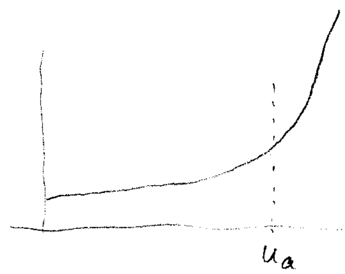


(Latency, Latenz)

meist vorausgesetzt als stetig, streng monoton $\nearrow$

1.3. Bureau of Public Roads

$$\tau_a(x_a) := \tau_a^0 \cdot \left(1 + \alpha \left(\frac{x_a}{u_a}\right)^{\beta}\right)$$



τ_a^0: free flow travel time $\quad$ u_a = practical "capacity"

$\left.\begin{array}{l}\beta = 4 \\ \alpha = 0{,}15\end{array}\right\}$ typische Werte

Flüsse darstellbar als Kantenfluss $x^A = \begin{pmatrix} \text{Fluss auf Kante } 1 \\ \ldots \quad 2 \\ \vdots \\ \ldots \quad m \end{pmatrix}$

oder Pfadfluss $x^P = \begin{pmatrix} \text{Fluss auf Weg } 1 \\ \vdots \\ \text{Weg } p \\ \text{Kreis } 1 \\ \vdots \\ \text{Kreis } q \end{pmatrix}$ $\quad p + q \leq m$

im Verkehr wollen wir Wege / Routen finden

$\Rightarrow$ Flüsse meist als Pfadfluss berechnen und erzeugen

$\Rightarrow$ Pfaddekomposition hat <u>keine Kreise</u>

$\mathcal{P}_k$ = Menge der (s_k, t_k) Pfade (o.B.d.A paarw. disjunkt)

$\mathcal{P} = \dot{\bigcup_k} \mathcal{P}_k$

Ein Pfadfluss x ist <u>zulässig</u>

$$:\Longleftrightarrow \sum_{P \in \mathcal{P}_k} x_P = d_k \qquad \text{demand wird erfüllt}$$

$$x_P \geq 0$$

"Kosten" <u>$C(x)$ eines Pfadflusses</u>:

$$:= \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a(x_a) \qquad \text{Gesamtfahrzeit (Netz Belastung)}$$

$$= \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \underbrace{\left(\sum_{a \in P} \tau_a(x_a) \right)}_{=: \tau_P(x)} \qquad \tau_P(x) \text{ Fahrzeit entlang Pfad } P$$

[denn:

$$x_a = \sum_{P \ni a} x_P$$

$$\sum_{a \in A} \underbrace{\left(\sum_{P \ni a} x_P \right)}_{x_a} \tau_a(x_a) = \sum_P \underbrace{\sum_{a \in P} \tau_a(x_a)}_{\tau_P(x)} x_P$$
]

Bemerkung: können Kosten auch bzgl. allgemeinerer Kantenkosten $c_a(x_a)$ genauso ermitteln:

$$C(x) := \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \cdot C_P(x) \quad \text{mit } C_P(x) = \sum_{a \in P} c_a(x_a)$$

in unserem Fall ist $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$

Setzen generell voraus, dass $x_a \cdot \tau_a(x_a)$ konvex ist

1.2 Das Systemoptimum

Problem SO: $\min \; C(x)$

unter $\sum_{P \in \mathcal{P}_k} x_P = d_k$ für alle $k \in C$

$x_P \geq 0$

Ein optimaler Fluss (Systemoptimum) wird mit f^* bezeichnet

Formulierung hat exponentiell viele Variable

ABER: Kantenformulierung hat nur m Variable

aus Kantenfluss mit Kosten $C(x)$ kann durch Pfaddekomposition ein Pfadfluss mit gleichen Kosten konstruiert werden

$\Rightarrow$ bei konvexer Zielfkt $C(x)$ kann SO mit der Ellipsoidmethode in polynomialer Zeit gelöst werden

$\Rightarrow$ SO $\in$ P (bis auf additives ε)

SO aus nichtlinearer Sicht:

Konvexes separables nichtlin. Opt. Problem mit linearen Nebenbed

$\hookrightarrow$ $C(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \cdot c_P(x)$ separabel nach Variablen

konvex $\Rightarrow$ lokales Optimum = globales Optimum

Optimalitätsbedingungen der nichtlinearen Optimierung:
(first order conditions, Kuhn-Tucker-Bedingungen)
ergeben:

1.1. Lemma: (Optimalitätsbedingungen für SO)

Seien die $c_a(x_a)$ konvex und differenzierbar

Dann ist ein Fluss f^* optimal in SO

$\iff$ $c_P'(f^*) \leq c_Q'(f^*)$ für alle $k \in C$ und alle Pfade $P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P^* > 0$

$$\text{mit } c_P'(f^*) := \sum_{a \in P} \frac{d}{dx_a} c_a(x_a) = \sum_{a \in P} c_a'(x_a)$$

Speziell für $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$ ergibt sich

$$c'(x_a) = \tau_a(x_a) + x_a \cdot \tau'(x_a)$$

Bemerkung:

(1) Beweisidee:

Fluss f^* ist lokal optimal (reicht zu zeigen)

$\iff$ Verlagerung von Fluss auf einen anderen Pfad erhöht die Kosten

$\iff$ marginale Kosten für Verringerung von Fluss entlang (s_i, t_i)-Pfad

$\leq$ marginale Kosten für Vergrößerung von Fluss entlang anderen (s_i, t_i)-Pfad

$\iff$ $c_P'(f^*) \leq c_Q'(f^*)$ ...

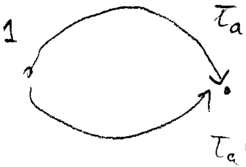
(2) Interpretation im Falle $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$

$$c'(x_a) = \underbrace{\tau_a(x_a)}_{\substack{\text{Fahrzeit} \\ \text{auf Kante}}} + \underbrace{x_a \cdot \tau'(x_a)}_{\substack{\text{"externe" Kosten} \\ \text{die Nutzer für andere Nutzer verursachen} \\ \text{bei Nutzen der Kante } a}} = \text{marginale Kosten}$$

Systemoptimum kann zu schlechten Individuallösungen führen

<u>Pigous Beispiel</u>

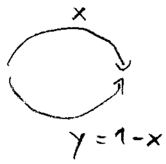
$d = 1$



$\tau_a(x_a) = x_a^{\beta}$

$\tau_a(x_a) = (\beta+1)(1-\varepsilon) \quad = \text{konstant}$

Optimalitätsbed. für SO bzgl. Fluss $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$\frac{d}{dx}(x \cdot x^{\beta}) = \frac{d}{dy}(\beta+1)(1-\varepsilon)y$$

$$(\beta+1)x^{\beta} = (\beta+1)(1-\varepsilon)$$

$\Rightarrow x^{\beta} = 1-\varepsilon \quad \Rightarrow x = \sqrt[\beta]{1-\varepsilon} < 1 \quad \Rightarrow y > 0$

$\Rightarrow$ im Systemoptimum folgendes Bild:

Fahrzeit oben: $\tau_a(x_a) = \left(\sqrt[\beta]{1-\varepsilon}\right)^{\beta} = 1-\varepsilon < 1$

Fahrzeit unten $(\beta+1)(1-\varepsilon) \to \infty$ für $\beta \to \infty$

„Einige" ($y > 0$) werden geopfert für das Gemeinwohl!

1.3 Das Nutzergleichgewicht (User Equilibrium)

Nutzer sind eigennützig, suchen für sich den schnellsten Weg

Ein zul. Fluss f ist in <u>Wardrop Equilibrium</u> (Wardrop 1952)

$:\Longleftrightarrow \tau_P(f) \le \tau_Q(f)$ für alle $k \in C$ und alle Pfade $P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$

Nash führte 1951 allgemein Gleichgewichte für nicht-kooperative Spiele ein.
In unserer Situation bedeutet dies:

Ein zulässiger Fluss ist im <u>Nash-Gleichgewicht</u> (<u>User Equilibrium</u>, <u>UE</u>)

$:\Longleftrightarrow$ kein Nutzer kann sich durch Wahl eines anderen Pfades verbessern (wenn alles andere gleich bleibt)

$\Longleftrightarrow$ für alle $k \in C$ und alle $Q, R \in \mathcal{P}_k$ mit $f_Q > 0$

und für alle $0 \le \varepsilon \le f_Q$ gilt:

der Fluss f^ε definiert durch

$$f_P^\varepsilon := \begin{cases} f_Q - \varepsilon & \text{für } P = Q \\ f_R + \varepsilon & \text{für } P = R \\ f_P & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt $\tau_Q(f) \le \tau_R(f^\varepsilon)$

1.2 Lemma: (UE = Wardrop Equilibrium)

Sind alle $\tau_a(x_a)$ stetig und schwach monoton, so gilt für jeden zulässigen Fluss f:

f ist im UE $\Longleftrightarrow$ f ist im Wardrop Equilibrium

Beweisidee: Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ $\square$

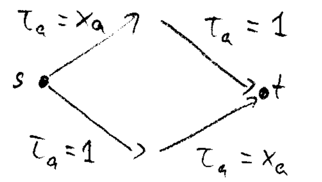
Bemerkung: keine der beiden Voraussetzungen kann fallengelassen werden $= \boxed{\text{Aufgabe 1}}$

<u>Nachteile des User Equilibrium:</u>

1) Nicht optimal im Sinne des SO

2) keine Monotonie (d.h. mehr Straßen $\not\Rightarrow$ geringere Gesamtfahrzeit)

<u>1.3 Beispiel</u> (Braess Paradox)



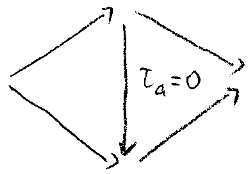
$d = 1$

UE: schicke $\frac{1}{2}$ entlang beider Pfade

$\Rightarrow \tau_p(x) = \frac{3}{2}$ auf jedem Pfad

$\Rightarrow C(x) = \sum_p \tau_p(x) \cdot x_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Baue neue schnelle Straße



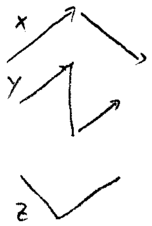
UE: schicke 1 entlang $\nearrow\downarrow\nearrow$

$\Rightarrow \tau_p(x) = 2$ auf diesem Pfad

$\Rightarrow C(x) = 2 > \frac{3}{2}$

$C(SO) \leq \frac{3}{2} \Rightarrow$ UE nicht optimal

Genauer Wert des SO:



$\overset{\text{Opt. Bed.}}{\Rightarrow}$ Gleichheit der marginalen Kosten auf jedem Pfad

$\nearrow\searrow$ $\quad \frac{d}{d(x+y)}(x+y)^2 + \frac{d}{dx}(x \cdot 1)$

$\uparrow\downarrow\nearrow$ $\quad \frac{d}{d(x+y)}(x+y)^2 + \frac{d}{dy}(y \cdot \varepsilon) + \frac{d}{d(y+z)}(y+z)^2$

$\searrow\nearrow$ $\quad \frac{d}{dz}(z \cdot 1) + \frac{d}{d(y+z)}(y+z)^2$

$$\Rightarrow \quad \underset{①}{2(x+y)+1} = \underset{②}{2(x+y)+\varepsilon+2(y+z)} = \underset{③}{1+2(y+z)}$$

$① = ③ \Rightarrow x = z$

$① = ② \Rightarrow 1 = \varepsilon + 2(y+z) \overset{x=z}{\Rightarrow} 2x = 1-\varepsilon-2y \quad ④$

$x+y+z = 1 \Rightarrow 2x = 1-y \quad ⑤$

$④,⑤ \Rightarrow 1-\varepsilon-2y = 1-y \Rightarrow y = -\varepsilon$

Widerspruch zu $y \geq 0$ falls $y > 0$

$\Rightarrow$ entlang Weg fließt kein Fluss $\Rightarrow$ nicht in Optimalitätsbedingung!

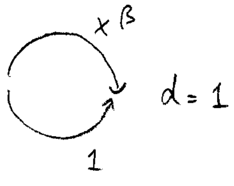
$\Rightarrow x = z = \frac{1}{2} \quad y = 0 \Rightarrow$ neue Straße wird (auch bei $\varepsilon > 0$) im Systemoptimum nicht genutzt

Messung, wie sich UE und SO unterscheiden

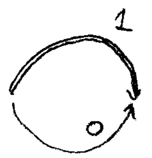
Preis der Anarchy $:= \dfrac{C(UE)}{C(SO)}$

1.4 Beispiel (Pigou)

Der Preis der Anarchy kann (bei beliebigen τ_a) beliebig groß werden.

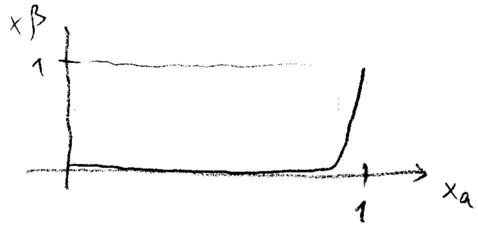


UE:

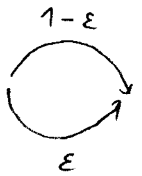


$\Rightarrow C(UE) = 1$

β groß $\Rightarrow x^\beta$ hat die Gestalt



$\Rightarrow$ Fluss



hat Kosten $(1-\varepsilon)\underbrace{(1-\varepsilon)^{\beta}}_{\substack{\approx 0 \\ \text{für } \beta \text{ groß}}} + \underbrace{\varepsilon \cdot 1}_{\substack{\approx 0 \text{ für} \\ \text{klein gewähltes } \varepsilon}}$

$\to \varepsilon$ für $\beta \to \infty$

$\Rightarrow \dfrac{C(UE)}{C(SO)} \approx \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ wird beliebig groß

(allerdings bei sehr steilen Fahrzeitfunktionen!)

Frage: Wie groß ist der Preis der Anarchy bei vernünftigen Fahrzeitfunktionen?

1.4 Beziehungen zwischen UE und SO

Basisbeziehung folgt aus Lemma 1.1 und der Definition des UE

Lemma 1.1 $\quad f^*$ ist SO $\iff c_P'(f^*) \le c_Q'(f^*) \quad \forall k, \forall P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$

Def UE $\quad f$ ist UE $\iff \tau_P(f) \le \tau_Q(f) \quad$ –"–

$\Downarrow$

1.5 Proposition (Beckmann, McGuire & Winston 1956)
Sei f^* ein zulässiger Fluss für eine Instanz mit konvexen, differenzierbaren, schwach monoton steigenden Fahrzeitfkt. $\tau_a(x_a)$. Dann gilt:

$$f^* \text{ ist SO bzgl. } \tau_a(x_a) \iff f^* \text{ ist UE bzgl } c_a'(x_a) = \tau_a(x_a) + x_a \tau'(x_a)$$

Interpretation:

(1) SO ist UE bzgl der marginalen Kosten $c_a'(x_a)$ als Fahrzeitfkt

(2) UE ist SO bzgl der Fahrzeitfkt. $\frac{1}{x_a} \int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt =: \hat{\tau}_a(x_a)$

denn: $\frac{d}{dx_a}\left(x_a \cdot \hat{\tau}(x_a)\right) = \tau_a(x_a) \Rightarrow$ Opt Bed für SO für $\hat{\tau}$
$\hat{=}$ Wardrop Bed für τ

$\Rightarrow$ UE ist SO bzgl Kostenfkt $C(x) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt$ (Beckmann Transformation)

1.6 Folgerung

(1) Unter den Voraussetzungen von Prop. 1.5 ist das UE f eindeutig als Kantenfluss bestimmt

(2) Für alle Pfade $P, Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P, f_Q > 0$ gilt
$\tau_P(f) = \tau_Q(f) =: L_k(f)$
[alle Fluss führenden (s_k, t_k) Wege haben dieselbe Fahrzeit]

(3) UE und SO können mit denselben Methoden berechnet werden

Beweis:

zu (1): UE ist SO bzgl. $\underbrace{\int_0^{x_a} \tau_a(t)\,dt}_{\text{streng monoton, diffbar, konvex}} =: \tau_a^*(x_a)$

$\Rightarrow$ UE ist Optimum einer konvexen, separablen streng monotonen Fkt

$\Rightarrow$ eindeutiges Optimum

zu (2) folgt aus Def des Wardrop Equilibrium $\square$

1.7 Folgerung (Mautgebühren)

Prop. 1.5 ist Basis für Streckenzölle (im Prinzip)

Wenn man ein SO bzgl. τ_a erzielen will, so muss man durch Maut die "Kosten" pro Kante zu $\underbrace{\tau_a(x_a)}_{\text{Zeit}} + \underbrace{x_a \tau'(x_a)}_{\text{Maut}}$ verändern

gleichgewichtet

Für die weiteren Überlegungen ist folgende Technik nützlich:

Sei f ein zulässiger, fester Fluss.

Die <u>Kosten eines zulässigen Flusses x relativ zu Fahrzeiten bzgl f</u>

sind $C^f(x) := \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a(f_a)$

Flussmenge bzgl x (x_a), Fahrzeit bzgl f ($\tau_a(f_a)$)

1.8 Proposition (Smith 1979, Dafermos 1980)

f sei zulässig für eine Instanz mit stetigen, schwach monotonen τ_a.

Dann gilt:

f ist UE $\iff$ $C^f(f) \le C^f(x)$ für alle zulässigen Flüsse x

Interpretation: UE f minimiert die relativen Kosten C_1^f

Beweis: "$\Rightarrow$"

f UE $\Rightarrow$ $\tau_P(f) = L_k(f)$ für alle $P \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P > 0$

$\tau_Q(f) \geq L_k(f)$ $\quad Q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_P = 0$

Für einen beliebigen Fluss x gilt dann

$$C_1^f(f) = C_1(f) = \sum_k \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_k \\ f_P > 0}} L_k(f) \cdot f_P \leq \sum_k \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_k \\ x_Q > 0}} L_k(f)\, x_Q \qquad (*)$$

$$= C^f(x)$$

"$\Leftarrow$"

$C^f(f) \leq C^f(x)$ nach Voraussetzung $\forall$ zul. Flüsse x

Annahme: f kein UE

$\Rightarrow \exists\, k,\ Q, R \in \mathcal{P}_k$ mit $f_Q > 0$ und $\tau_Q(f) > \tau_R(f)$

Sei x der Fluss, der aus f entsteht, indem aller Fluss auf Q auf den Weg R geschickt wird

$$\Rightarrow C^f(f) - C^f(x) = \tau_Q(f) \cdot f_Q - \tau_R(f) \cdot f_Q$$

$$= (\tau_Q(f) - \tau_R(f))\, f_Q > 0$$

$\Rightarrow C^f(f) > C^f(x)$, Widerspruch $\square$

1.9 SATZ (Roughgarden & Tardos 2002)

Für affin lineare Fahrzeitfunktionen $\tau_a(x_a) = \alpha_a x_a + \beta_a$ gilt $\frac{UE}{SO} \leq \frac{4}{3}$

Ist $\beta_a = 0$ für alle a, so ist $\frac{UE}{SO} = 1$

Beweis (Schulz & Stier 2004)

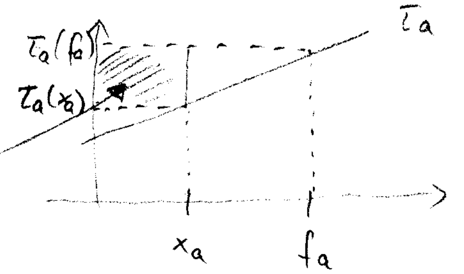
(1) Sei f ein UE Fluss und x ein beliebiger zulässiger Fluss

Prop. 1.8 $\Rightarrow \quad C'(f) = C^f(f) \leq C^f(x) = \sum_{a \in A} \tau_a(f_a) x_a$

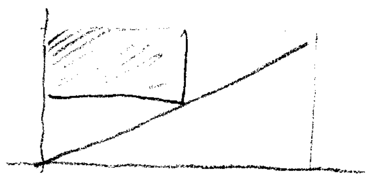
$$= \underbrace{\sum_{\substack{a \in A \\ x_a < f_a}} \tau_a(f_a) x_a}_{} + \sum_{\substack{a \in A \\ x_a \geq f_a}} \underbrace{\tau_a(f_a) x_a}_{\leq \tau(x_a) \cdot x_a}$$

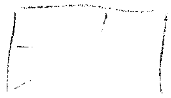
wegen Monotonie von τ

$$= \tau_a(x_a) x_a + \underbrace{(\tau_a(f_a) - \tau_a(x_a))\, x_a}_{}$$



Fläche  wird am größten in folgender Situation



$\Rightarrow$  $\leq \frac{1}{4} \cdot \tau_a(f_a) \cdot f_a = \frac{1}{4}$ 

$$\Rightarrow C(f) \leq \sum_{a \in A} \tau_a(x_a) x_a + \frac{1}{4} \sum_{a \in A} \tau_a(f_a) \cdot f_a = C'(x) + \frac{1}{4} C'(f)$$

$\Rightarrow \frac{3}{4} C'(f) \leq C'(x) \Rightarrow C'(f) \leq \frac{4}{3} C'(x)$ für jeden zulässigen Fluss, speziell für das Systemoptimum

Braess Paradox ergibt: $\frac{UE}{SO} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ Schranke ist scharf

↑

affin lineare Fahrzeitfkt

(2) Sei $\tau_a(x_a) = \alpha_a \cdot x_a$, d.h. $\beta_a = 0 \ \forall a$

Optimalitätskriterium für SO:

$$\underbrace{\tau'_P(f^*)}_{\sum_{a\in P} 2\alpha_a x_a} \le \underbrace{\tau'_Q(f^*)}_{\sum_{a\in Q} 2\alpha_a x_a} \quad \forall k \ \forall P,Q \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f^*_P > 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{a\in P} 2\alpha_a x_a \le \sum_{a\in Q} 2\alpha_a x_a \quad \ldots\ldots$$

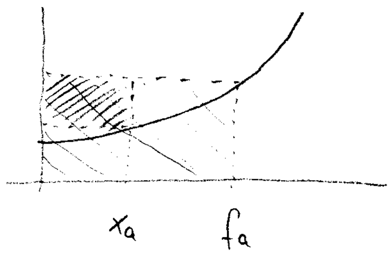
Wardrop Bedingung für UE

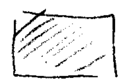
$$\tau_P(f) \le \tau_Q(f) \quad \forall \ldots$$

$$\sum_{a\in P} \alpha_a x_a \le \sum_{a\in Q} \alpha_a x_a \quad \forall \ldots \qquad (2)$$

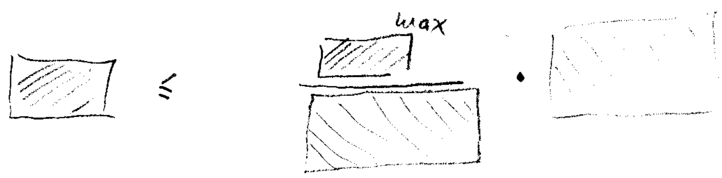
Offenbar sind (1) und (2) äquivalent □

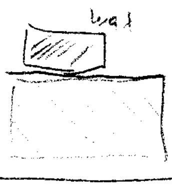
Verallgemeinerung auf allgemeine Fahrzeitfunktionen:

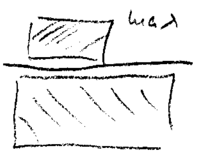


mache  möglichst groß → max

$\Rightarrow$ im Beweis ist



$\Rightarrow$ UE $\le$ SO + () UE

$\Rightarrow$ $\dfrac{UE}{SO} \le 1 \Big/ \Big(1 -$  $\Big)$

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$: Berechne den Preis der Anarchie für quadratische / kubische / Grad 4 Polynome als Fahrzeitfunktion (mit Koeffizienten ≥ 0)

1.10 SATZ (Roughgarden & Tardos 2002)

$C(UE) \leq C(SO$ für den doppelten demand $)$

positive Interpretation:

Netzbelastung im UE ist beschränkt (durch die optimale Netzbelastung für den doppelten Bedarf)

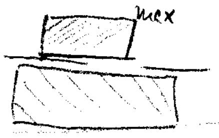
negative Interpretation

zu den Kosten des UE kann optimal bis zum doppelten demand geroutet werden

Verwandtes Resultat

1.11 SATZ (Correa, Schulz, Stier 2005)

$C(UE) \leq C($ SO für den $(1+\beta)$-fachen demand $)$

mit $\beta =$ 

$\beta \leq 1 \Rightarrow$ Satz 1.11 impliziert Satz 1.10

Ist aber im Einzelfall sogar deutlich schärfer

z.B. affin-lineare Fahrzeitfunktionen $\Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow C(UE) \leq C($ SO für den $5/4$-fachen demand $)$

<u>Beweis Satz 1.11</u>

Sei f Fluss im UE, x optimaler Fluss für $(1+\beta)$-fachen demand

Betrachte Fluss y mit $y_a := \frac{1}{1+\beta} x_a$

$\Rightarrow$ y ist Fluss zum demand d, genauso wie f

$\Rightarrow$ (Prop 1.8) $\quad C_1(f) \leq C_1^f(y) = \sum_{a \in A} \tau_a(f) \cdot y_a = \frac{1}{1+\beta} C_1^f(x)$

$\Rightarrow$ $(1+\beta)\, C_1(f) \leq C^f(x) = \sum_{a \in A} \tau_a(f)\, x_a$

$$\leq C(x) + \beta\, C_1(f)$$

$\uparrow$

Beweis von Satz 1.9
für allgemeine Kostenfkt.

$\Rightarrow$ $C_1(f) \leq C_1(x)$ ∎