

## 8. SCHRANKEN FÜR $q_C$ UND KURZE KREISBASEN

Wir haben bisher zwei verschiedenen MIP-Formulierungen des PESP kennen gelernt. Die erste beruht auf Potenzialen

$$(\text{PESP})_{\text{MIP}} \begin{cases} \sum w_a x_a \\ x_a = \pi_j - \pi_i & \forall a = (i, j) \\ \ell_a \leq x_a + p_a T \leq u_a & \forall a \in A \\ 0 \leq x_a \leq T - 1 \\ p_a & \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ebenso haben wir festgestellt, dass die Suche nach einer zulässigen periodischen Spannung  $x_a$  der Suche nach ganzzahliger Periodenoffsets  $p_a$  und einem zulässigen aperiodischen Potenzial entspricht. Die  $p_a$  bestimmen dabei die NP-Vollständigkeit des Problems.

Die zweite Formulierung ging über ganzzahligen Kreisbasen

$$(\text{PESP})_{\text{MIP}(C)} \begin{cases} \min \sum w_a x_a \\ \Gamma^\top x & = Tq \\ \ell_a \leq x_a \leq u_a & \forall a \in A \\ q & \in \mathbb{Z}^{|m-n+1|}. \end{cases}$$

Hier entsprach die Suche nach einer zulässigen periodischen Spannung  $x_a$  der Suche nach ganzzahligen  $q_C$  für alle Kreise einer ganzzahligen Kreisbasis des Zykelraums und einem zulässiger Vektor  $x$  mit  $\ell_a \leq x_a \leq u_a$ . Auch hier bestimmt die Suche nach ganzzahligen  $q_C$  die Schwierigkeit des Problems.

Es stellt sich nun die Frage welches der beiden Probleme leichter zu lösen ist. Ein *Maß für die Güte* könnte auf der Herleitung von unteren und oberen Schranken für die  $p_a$  bzw.  $q_C$  basieren. Diese können dabei den Lösungsraum für  $q_C$  und  $p_a$  enorm verkleinern. Erhalten wir z.B.  $q_C \leq q_C \leq \bar{q}_C$  für alle Kreise der Basis, dann ist die  $\{$ Menge der möglichen Vektoren  $q\} \subset \prod_{C \in \mathcal{C}} [q_C, \bar{q}_C] \cap \mathbb{Z}^{\mathcal{C}}$ . Die *Größe des Suchraums* aller möglichen Lösungen beträgt dann maximal  $\prod_{C \in \mathcal{C}} (\bar{q}_C - q_C + 1)$ . Betrachten wir die Größe des Suchraums für Periodenoffsets, so erhalten wir für die Größe dieses Suchraums  $\prod_{a \in A} (\bar{p}_a - p_a + 1)$ . Da  $|\mathcal{C}| < |A|$  ist der Suchraum der  $q_C$  tendenziell kleiner als der der  $p_a$ . Empirisch hat sich ergeben, dass die Größe des Suchraums Einfluss auf die Lösung des MIP hat. Dabei ist es leichter, gute Schranken für die Kreisformulierung zu bekommen.

### 8.1. Schranken für die $q_C$ durch Kreisungleichungen.

**Theorem 8.1.** [Odiijk '94] *Es gibt genau dann eine zulässige periodische Spannung  $x$  zu Kreisvielfachen  $q_C$ , wenn*

$$q_C \leq \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a \right)$$

für alle elementare Kreise in  $G$  gilt.

*Beweis.* Sei  $x$  eine zulässige periodische Spannung.

- $\Leftrightarrow$  Es gibt Periodenoffset  $p_a$  mit  $\ell_a \leq x_a + p_a T \leq u_a$  für alle  $a \in A$ .
- $\Leftrightarrow$  Der Vektor  $x$  ist zulässige Potentialdifferenz bzgl. den Restriktionen  $[\ell_a - p_a T, u_a - p_a T]$  auf Kante  $a$ .

Satz 6.2  $\Leftrightarrow$  Der Digraph  $\bar{G}$  mit den Kantengewichten  $u_{(i,j)} - p_{(i,j)} T$  für die Kante  $(i, j)$  und  $-(\ell_{(i,j)} - p_{(i,j)} T)$  für die Kante  $(j, i)$ , wobei  $(i, j) \in E(G)$ , hat keinen Kreis negativer Länge.

⇔ Es gilt

$$\sum_{a \in C^+} (u_a - p_a T) - \sum_{a \in C^-} (\ell_a - p_a T) \geq 0$$

für alle elementare Kreise in  $G$ .

⇔

$$\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a - p^\top \zeta(C) \geq 0$$

für alle elementare Kreise in  $G$ .

⇔

$$p^\top \zeta(C) \leq \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a$$

für alle elementare Kreise in  $G$ .

Es stellt sich die Frage, wie sich die  $p^\top \zeta(C)$  zu  $q_C$  verhalten. Aus dem Beweis von Satz 7.2 wissen wir

$$\underbrace{x^\top \zeta(C)}_{=q_C T \text{ (} x \text{ zul.)}} = p^\top \zeta(C)$$

gilt. Damit erhalten wir:

$$p^\top \zeta(C) \leq \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a$$

für alle elementare Kreise in  $G$ .

⇔

$$q_C \leq \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a \right)$$

für alle elementare Kreise in  $G$ .

□

**Corollary 8.2.** Die Kreisvielfachen  $q_C$  einer zulässigen periodischen Spannungen erfüllen die Kreisungleichungen

$$\underline{q}_C := \left\lceil \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} \ell_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right\rceil \leq q_C \leq \left\lfloor \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a \right) \right\rfloor =: \bar{q}_C.$$

*Beweis.* Die Ungleichung  $q_C \leq \bar{q}_C$  folgt aus Satz 8.1 und der Ganzzahligkeit von  $q_C$ .

Sei  $\overleftarrow{C}$  der Kreis zu  $C$ , der zu der oberen Schranke geführt hat, mit umgekehrter Orientierung. Dann gilt  $\overleftarrow{C}^+ = C^-$ ,  $\overleftarrow{C}^- = C^+$ ,  $q_{\overleftarrow{C}} = -q_C$  und  $\zeta(C) = -\zeta(\overleftarrow{C})$ . Dann erhalten wir durch Satz 8.1

$$\begin{aligned} q_{\overleftarrow{C}} &\leq \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in \overleftarrow{C}^+} u_a - \sum_{a \in \overleftarrow{C}^-} \ell_a \right) \\ \Leftrightarrow -q_C &\leq \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^-} u_a - \sum_{a \in C^+} \ell_a \right) \\ \Leftrightarrow q_C &\geq \left\lceil \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} \ell_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right\rceil. \end{aligned}$$

□

Wir werden später auf diese Schranken zurückkommen. Allerdings wollen wir vorher die Kreisungleichungen polyedertheoretisch interpretieren.

**8.2. Polyedertheoretische Interpretation der Kreisungleichungen.** Wir haben den folgenden Polyeder gegeben:  $Q := \{(\pi, p) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \mid \pi_j - \pi_i + p_a T \leq u_{ij}, -(\pi_j - \pi_i + p_a T) \leq -\ell_{ij} \text{ für alle } (i, j)\}$  Das ist also ein Polyeder der Form  $\{x \mid Ax \leq b\}$ . Die ganzzahlige Hülle  $Q_I$  von  $Q$  entspricht den zulässigen Lösungen des PESP. Wir wissen aus der ADM II, dass die Chvátal-Gomory Schnitte gültige Ungleichungen für  $Q_I$  definieren. Dabei waren diese Schnitte für  $Ax \leq b$  definiert durch die Wahl von  $y \in \mathbb{R}^m$  mit  $y^\top Ax \leq \lfloor y^\top b \rfloor$  und  $y^\top Ax \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition 8.3.** *Die Kreisungleichungen*

$$\underline{q}_C \leq p^\top \zeta(C) = q_C \leq \bar{q}_C$$

sind Chvátal-Gomory Schnitte.

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass für  $p^\top \cdot \zeta(C) \leq \bar{q}_C$  der Chvátal-Gomory-Schnitt  $y^\top Ax \leq \lfloor y^\top b \rfloor$  mit  $y^\top = (\underbrace{0, \dots, 0}_\pi, y_{e_1}, \dots, y_{e_m})$  und  $y_{e_i} = \frac{1}{T} \zeta(C)_e$  entspricht.  $\square$

**Proposition 8.4.** *Der Chvátal-Rang (ADM II) von  $Q$  ist unbeschränkt (mit wachsender Graphengröße). Speziell ist  $Q_I \subsetneq Q + \text{Kreisungleichung}$ .*

Der Beweis nutzt ein allgemeines Resultat über Chvátal-Rang und NP-Theorie:

**Theorem 8.5.** *[Boyd & Pulleyblank '84] Sei  $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine polynomial lösbare Familie rationaler Polyeder in  $\mathbb{R}^k$ . Betrachte das Entscheidungsproblem: Gilt  $\max\{c^\top x \mid x \in P^k, x \in \mathbb{Z}\} > \delta$ , wobei  $k, c \in \mathbb{Q}^k, \delta \in \mathbb{Q}$  gegeben sind. Dies sei für  $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$  NP-vollständig ist. Dann gibt es kein  $t \in \mathbb{N}$ , so dass  $(P^k)^t = (P^k)_I$  für alle  $k$  (außer  $P = \text{CO-NP}$ ). Wobei  $(P^k)^t$  die  $t$ -te Chvátalhülle ist.*

*Beweis.* siehe Schrijver Buch 1986  $\square$

Betrachten wir nun den Beweis von Proposition 8.4.

*Beweis.* Sei  $P^k := Q^{n+m}$  und  $k = n + m$ . Die MAX-Variante des PESP ist NP vollständig. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 8.5 erfüllt und somit gilt, dass Chvátal Rang der  $Q^{n+m}$  unbeschränkt ist.  $\square$

**8.3. Kleiner Suchraum durch kurze Kreisbasen.** Sei  $\mathcal{B}$  eine ganzzahlige Kreisbasis. Dann folgt aus Korollar 8.2, dass

$$\underline{q}_C := \left\lceil \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} \ell_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right\rceil \leq q_C \leq \left\lfloor \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a \right) \right\rfloor =: \bar{q}_C.$$

Somit kann  $q_C$  nur die Werte  $\underline{q}_C, \underline{q}_C + 1, \dots, \bar{q}_C$  annehmen. Wir haben also genau  $\bar{q}_C - \underline{q}_C + 1$  Möglichkeiten. Ein Maß für die Größe des Lösungsraums der  $q_C$  ist  $\prod_{C \in \mathcal{B}} (\bar{q}_C - \underline{q}_C + 1)$ . Das entspricht so ungefähr

$$\begin{aligned} & \prod \left( \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a \right) - \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} \ell_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) + 1 \right) \\ & \approx \prod \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} (u_a - \ell_a) + \sum_{a \in C^-} (u_a - \ell_a) \right) \\ & = \prod \sum_{a \in C} (u_a - \ell_a). \end{aligned}$$

Wir wollen den Suchraum so weit wie möglich verringern. Mit Hilfe des Logarithmus gelangen wir zu dem Problem  $\sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{a \in C} (u_a - \ell_a)$  zu minimieren. Definieren wir mit  $\sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{a \in C} w_a$  die Länge einer Basis zur Kantenbewertung  $w_a$ , dann suchen wir eine minimale Kreisbasis mit der Kantenbewertung  $w_a = u_a - \ell_a$ .

Die Formulierung des  $(\text{PESP})_{\text{MIP}(C)}$  mit einer minimalen Kreisbasis, hat großen Einfluss auf die Rechenzeit, da die Spanne  $\bar{q}_C - \underline{q}_C$  deutlich kleiner wird (Abb. 90).

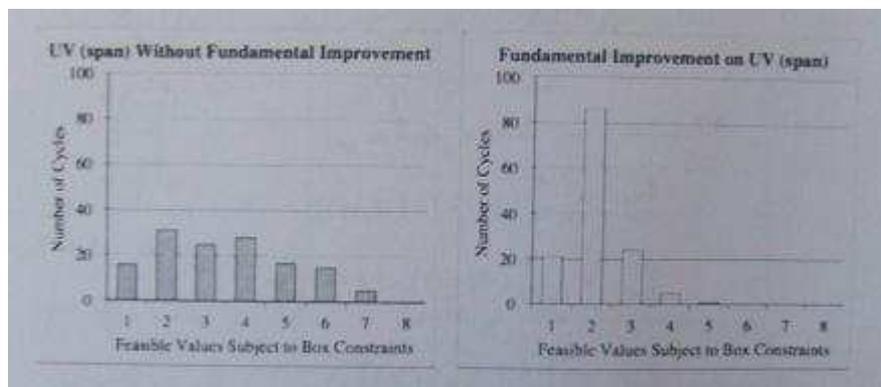


ABBILDUNG 90. Die Suchraum der  $q_C$  wird durch eine minimale Kreisbasis stark eingeschränkt.

Die Rechenzeit eines Problems durch die Wahl einer minimalen Kreisbasis verringert sich um mehrere 100%. Außerdem ergibt sich die folgende Faustregel: Eine Instanz ist lösbar, wenn der Suchraum  $\leq 10^{50}$ . Es ist schwer lösbar, wenn der Suchraum  $\geq 10^{90}$  ist. Für Instanzen, die dazwischen liegen, können wir keine allgemeine Aussage treffen.

**Example 8.6.** Im folgenden Beispiel wollen wir zeigen, wie sich die unterschiedlichen Ansätze auf die Größe des Lösungsraums auswirken. Dazu betrachten wir den folgenden Graphen (Abb. 91).

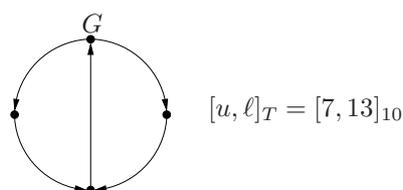


ABBILDUNG 91. Beispiel für kleinen Periodenoffset-Raum.

Alle Kanten haben die Schranken  $[7, 13]$  mit der Taktfahrzeit 10.

Die Abschätzung über das Knotenpotenzial ergibt, dass pro Knoten ein Wert  $\pi_i \in \{0, 1, \dots, T-1 = 9\}$  angenommen werden kann. Wir müssen also  $10^5 = 100.000$  Kombinationen überprüfen, ob ein Periodenoffset  $p_a$  existiert mit  $\pi_j - \pi_i + p_a T \in [7, 13]$ . Das Überprüfen, ob zu einem  $p_a$  ein zulässiges Periodenpotenzial existiert, ist leicht, da es sich um ein aperiodisches Problem handelt.

Bei der Abschätzung über Spannungen erhalten wir, dass pro Kante  $a$  ein Wert  $x_a \in \{7, 8, \dots, 13\}$  angenommen werden kann. Für jeder der  $7^5 = 16.807$  Kombinationen muss dann geprüft werden, ob  $x$  ein periodisches Potenzial ist. D.h. wir müssen das LGS  $\Gamma^T x = T \cdot q$  lösen.

Betrachten wir nun die Abschätzung über die Basis der Fundamentalkreise für den Baum  $T_1$  (Abb. 92).

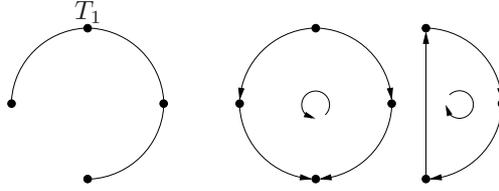


ABBILDUNG 92. Der Baum  $T_1$  definiert die Fundamentalkreisbasis bestehend aus den Kreisen  $C_1$  und  $C_2$ .

Berechnen wir die Schranken für  $q_{C_i}$  für die beiden Kreise: Für die untere Schranke von  $q_{C_1}$  erhalten wir  $\underline{q}_{C_1} = \lceil \frac{1}{10}(7 + 7 - 13 + 13) \rceil = -1$  und für die obere  $\bar{q}_{C_1} \lfloor \frac{1}{10}(13 + 13 - 7 - 7) \rfloor = 1$ . D.h. für  $q_{C_1}$  sind drei Werte  $\{-1, 0, 1\}$  möglich. Für den nächsten Kreis erhalten wir  $q_{C_2} = 3$ . D.h. der ganze Suchraum besetzt nur aus 3 Vektoren.

Betrachte einen anderen Baum  $T_2$  (Abb. 93).

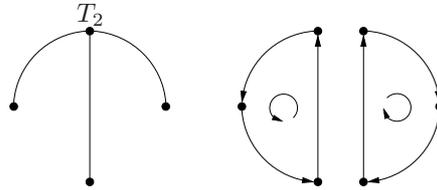


ABBILDUNG 93. Der Baum  $T_2$  definiert eine Fundamentallbasis, die aus zwei gleichen Kreisen besteht.

Beide Fundamentalkreise sind gleich bzw. sie haben die gleich Schranken und es gilt sogar  $\underline{q}_{C_i} = 3$  und  $\bar{q}_{C_i} = 3$ . Damit ist  $q = (3, 3)$  die einzige Lösung. Die Lösung für die Spannung  $x$  ergibt sich aus  $\Gamma^\top x = Tq$ . Nur weil mein  $q$  eindeutig ist, muss die Spannung nicht eindeutig sein.

Wie wir an diesem Beispiel gesehen haben, können die Kreisungleichungen den Lösungsraum erheblich verkleinern.

8.3.1. *Minimale Kreisbasen in der Menge aller Kreisbasen.* Das Problem eine minimale Kreisbasis für einen Graphen  $G$  zu finden ist polynomial. Schränkt man dieses allerdings auf minimal ganzzahlige Kreisbasen ein, so wird das Problem deutlich schwerer. Wir wollen uns hier darauf beschränken für einen gegebenen Graphen eine minimale Kreisbasis zu finden.

Im letzten Abschnitt hatten wir gesehen, dass die Zielfunktion  $\min \sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{a \in C} w_a$  mit  $w_a = u_a - \ell_a$  nicht von der Orientierung der Kanten abhängt. Wir brauchen also nur noch ungerichtete Graphen zu betrachten. Bzgl. ungerichteter Graphen betrachtet man in der Regel den Kreisraum über  $\text{GF}(2)$ , wobei  $\text{GF}(2)$  den Körper über die Menge  $\{0, 1\}$  darstellt. Folgendes Lemma zeigt, dass dies auch bzgl. minimaler Kreisbasen möglich ist.

**Lemma 8.7.** *Sei  $G$  ein Digraph und  $G'$  der dazugehörige ungerichtete Graph. Sei  $\mathcal{B}$  eine Menge von  $\nu$  Kreisen im Zykelraum von  $G$  in  $\mathbb{R}^{|E|}$  und sei  $\mathcal{B}'$  die Menge von  $\nu$  dazugehörigen Kreisen in  $G'$  in  $\text{GF}(2)^{|E|}$ . Dann gilt: Die  $\det \mathcal{B}$  ist genau dann ungerade (und damit  $\mathcal{B}$  Basis von Zykelraum von  $G$  über  $\mathbb{R}$ ), wenn  $\mathcal{B}'$  eine Basis des Zykelraums von  $G'$  über  $\text{GF}(2)$  ist.*

*Beweis.* Die Laplace Entwicklung ergibt

$$\det \mathcal{B} = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \det \mathcal{B}' = 0.$$

□

**Example 8.8.** Es gibt Basen über  $\mathbb{R}$ , die keine Basen über  $\text{GF}(2)$  sind. Betrachten wir dazu den Petersengraph (Abb. 94).

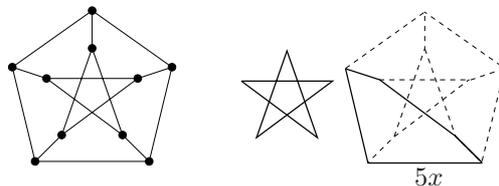


ABBILDUNG 94. Der Petersen Graph mit Basis über  $\mathbb{R}$  aber nicht über  $\text{GF}(2)$ .

Betrachten wir die fünf äußeren Kreise und den Inneren, so bilden diese eine Kreisbasis  $\mathcal{B}$ . Insbesondere gilt  $\det \mathcal{B} \neq 0$ . Allerdings gilt  $\det \mathcal{B}' = 0$ .

*Conclusion 8.9.* Jede ganzzahlige Basis in  $G$  ist eine Basis in  $G'$ .

Es reicht also im ungerichteten Graphen eine minimale Kreisbasis bzgl.  $\text{GF}(2)$  zu finden und dann zu prüfen, ob sie im gerichteten ganzzahlig ist.

Im folgenden werden wir zwei unterschiedliche Algorithmen kennen lernen, die in einem ungerichteten gewichteten zusammenhängenden Graphen eine minimale Kreisbasis berechnen. Betrachten wir als erstes den Algorithmus von de Pina (Alg. 7). Der Algorithmus berechnet die Kreise aus  $\mathcal{B}$  iterativ, indem er einen kürzesten Kreis aus dem orthogonalen Komplement der bisherigen Kreise wählt.

---

**Algorithm 7** Algorithmus von de Pina '95

---

- 1: **Input:**
  - 2: ungerichteter zusammenhängender Graph  $G$  mit positiven Kantengewichten  $\omega_e \geq 0$
  - 3:
  - 4: **Output:**
  - 5: minimale Kreisbasis über  $\text{GF}(2)$
  - 6:
  - 7:  $\mathcal{B} = \emptyset$
  - 8: **for**  $i := 1, \dots, \nu$  **do**
  - 9:   **if**  $i = 1$  **then**
  - 10:     Sei  $S_1 \in \{0, 1\}^m$  beliebig  $S_1 \neq 0$ .
  - 11:   **else**
  - 12:     Sei  $S_i \neq 0$  orthogonal zu den bereits berechneten Kreisen  $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$  aus  $\mathcal{B}$ . D.h.  $S_i$  ist nicht triviale Lösung des linearen Gleichungssystem  $\zeta(C_k)^\top x = 0$  für  $k = 1, \dots, i-1$ .
  - 13:   **end if**
  - 14:   Berechne den kürzesten Kreis  $C_i$  (d.h.  $\omega(C_i)$  ist minimal) mit  $\zeta(C_i)^\top \cdot S_i = 1$
  - 15:    $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{C_i\}$
  - 16: **end for**
- 

**Theorem 8.10.** [de Pina '95] Der Algorithmus 7 berechnet eine minimale Kreisbasis über  $\text{GF}(2)$ .

*Beweis.* Wir nehmen an, dass der Algorithmus 7 keine minimale Kreisbasis berechnet. Betrachte das kleinste  $i$ , so dass  $\{C_1, C_2, \dots, C_{i-1}\}$  zu einer minimalen Kreisbasis  $\mathcal{B}^*$  erweiterbar ist, aber  $\{C_1, \dots, C_{i-1}, C_i\}$  aber nicht. Da  $\mathcal{B}^*$  eine Basis ist, kann  $C_i$  als Linearkombination der Kreise aus  $\mathcal{B}^*$  dargestellt werden. Sei also

$$(17) \quad C_i = D_1 + D_2 + \dots + D_k.$$

Aus dem Algorithmus wissen wir, dass  $C_i^\top S_i = 1$  gilt. In die Gleichung (17) eingesetzt erhalten wir

$$\sum_{\ell=1}^k D_\ell^\top S_i = 1.$$

Da wir über  $\text{GF}(2)$  arbeiten, gilt  $D_r^\top S_i \in \{0, 1\}$ . Also muss mindestens ein  $D_j$  mit  $D_j^\top S_i = 1$  existieren. Betrachte  $B' := B^* \setminus \{D_j\} \cup \{C_i\}$ . Es gilt

$$D_j \stackrel{(17)}{=} C_i + D_1 + \dots + D_{j-1} + D_{j+1} + D_k.$$

Somit ist jeder beliebiger Kreis  $x$  aus  $G$  als Linearkombination der Kreise aus  $B'$  darstellbar. Damit ist  $B'$  eine Kreisbasis von  $G$ . Es gilt  $D_j \notin \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ , da  $D_j^\top S_i = 1$ , aber  $C_\ell^\top S_i = 0$  für  $\ell = 1, \dots, i-1$  gilt. Also ist  $\{C_1, \dots, C_{i-1}\} \subset B'$ .

Aus  $D_j^\top S_i = 1$ , wissen wir, dass  $w(C_i) \leq w(D_j)$ . Also muss  $B'$  eine minimale Kreisbasis sein, die  $C_1, \dots, C_i$  enthält. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Bevor wir uns mit der Aufwandbetrachtung des Algorithmus beschäftigen, betrachten wir den Schritt zur Berechnung eines kürzesten Kreises  $C_i$ , für den  $\langle C_i, S_i \rangle = 1$  gilt. In der  $i$ -ten Iteration definieren wir einen Hilfsgraphen  $G_i$  aus  $G$  und  $S_i$ . Es gilt  $G_i := (V_i, E_i)$  mit  $V_i := \{v^+, v^- | v \in V\}$  und

$$E_i := \{(u^+, v^+), (u^-, v^-) | e = (u, v) \in E, e \notin S_i\} \cup \{(u^+, v^-), (u^-, v^+) | e = (u, v) \in S_i\}.$$

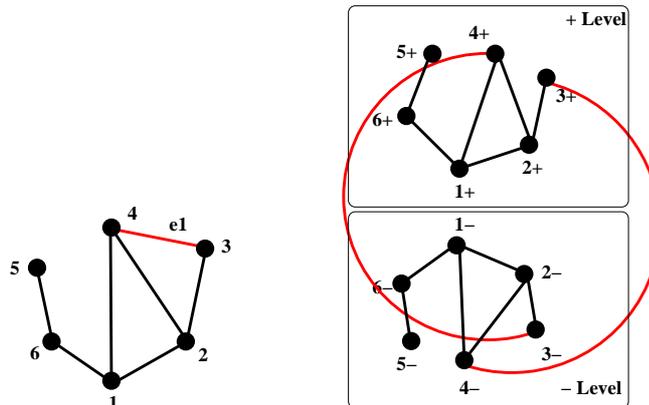
Zu jedem Knoten  $v^+$  berechnen wir einen kürzesten Weg  $p_v$  nach  $v^-$ . Wähle jetzt  $p^* = \min_{v \in V} p_v$ . Aus diesem Weg in  $G_i$  können wir einen Kreis  $C_i$  in  $G$  definieren, für den  $\langle C_i, S_i \rangle = 1$  gilt. Das folgende Lemma von de Pina sagt aus, dass der Kreis auch der kürzeste Kreis mit dieser Eigenschaft ist.

**Lemma 8.11.** *Der Weg  $p^*$  korrespondiert zu einem kürzesten elementaren Kreis  $C_i$  in  $G$ , der eine ungerade Schnittmenge mit  $S_i$  hat.*

Um die Konstruktion von  $C_i$  besser zu verstehen, betrachten wir das folgende Beispiel:

**Example 8.12.** Die einzelnen Schritte zur Berechnung von  $C_i$ :

- (1) Der Graph  $G$  und der Vektor  $S_i$  (rote Kanten) sind gegeben. Daraus wird der Graph  $G_i$  erstellt.



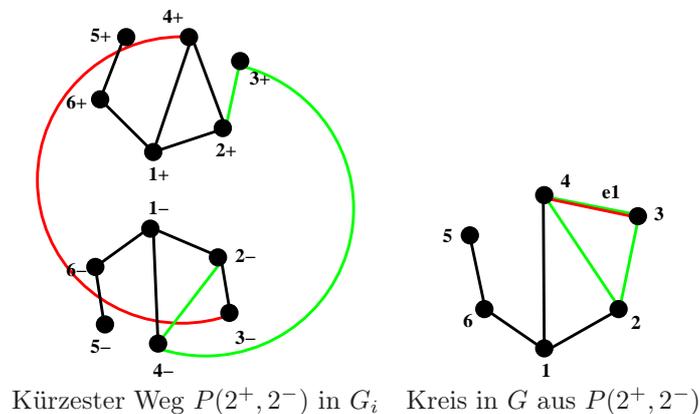
Der Graph  $G$  und die Witness  $S_i$

Der Graph  $G_i$

Man kann  $G_i$  als einen Zwei-Level-Graphen von  $G$  mit einem “+”-Level und einem “-”-Level darstellen. In jedem Level existieren Kanten aus  $E \setminus S_i$ . Zwischen den Leveln liegen die Kanten aus  $S_i$ . Es gibt immer eine

Verbindung zwischen dem “+”- Level und dem “-”- Level, weil  $S_i$  nicht der Nullvektor ist.

- (2) Umwandlung des kürzesten Weges der kürzesten Wege von allen  $v^+$  zu allen  $v^-$  Knoten in  $G_i$  in einen Kreis in  $G$ .



Bei der Aufwandsbetrachtung wiegen die Berechnung von  $S_i$  und des Kreises  $C_i$  am meisten. Um  $S_i$  zu berechnen, müssen wir ein lineares Gleichungssystem mit  $m$  Variablen und  $\nu - 1 \leq m$  Gleichungen lösen. Mit der Gaußelimination kann dies in  $\mathcal{O}(m^3)$  gelöst werden. Insgesamt müssen  $m$  solcher Gleichungssysteme berechnet werden. Wir erhalten also einen Aufwand von  $\mathcal{O}(m^4)$ .

Um  $C_i$  zu konstruieren, müssen wir also pro Schritt  $n$  kürzesten Wege von  $v^+$  nach  $v^-$  in  $G_i$  mit dem Dijkstra Algorithmus berechnen. Die Berechnungen nehmen also  $\mathcal{O}(n \cdot (m + n \log n))$  Zeit in Anspruch. Damit erhalten wir, dass der Algorithmus 7 polynomial in  $\mathcal{O}(m^4)$  ist.

**Theorem 8.13.** [Kavitha et al '04] Der Algorithmus 7 kann in  $\mathcal{O}(m \cdot nSP(n, m))$  implementiert werden.

*Note 8.14.* Der Algorithmus 7 folgt dem Greedy-Prinzip, da er in jeder Iteration einen kürzesten Kreis wählt, der orthogonal zu der Bisherigen ist. Für die Orthogonalität ist der Vektor  $S_i$  der „Zeuge“.

Als zweiten Algorithmus betrachten wir den von Horton aus dem Jahr 1987. Sein Ansatz ist eher graphentheoretisch. Die Grundlage für seinen Algorithmus bildet das folgende Lemma.

**Lemma 8.15.** Sei  $\mathcal{B}$  eine minimale Kreisbasis in  $G$  und  $C \in \mathcal{B}$ . Sei  $i$  ein Knoten von  $C$ . Dann enthält  $C$  eine Kante  $(j, k)$ , so dass die Wegstrecke von  $i$  zu  $j$  und von  $i$  zu  $k$  auf  $C$  kürzeste Wege in  $G$  sind (Abb. 95).

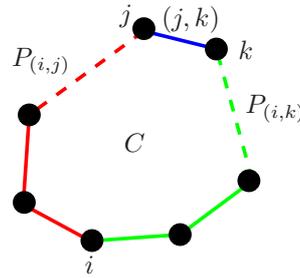


ABBILDUNG 95. Für jeden Knoten  $i \in C$  mit  $C \in \mathcal{B}$  gibt es eine Kante  $(j, k)$ , so dass  $C = P_{(i,j)} + (j, k) + P_{(i,k)}$  gilt, wobei  $P_{(x,y)}$  ein kürzester Weg von  $x$  nach  $y$  in  $G$  ist.

*Beweis.* ohne Beweis. □

Betrachten wir nun den Algorithmus von Horton (Alg. 8).

---

**Algorithm 8** Algorithmus von Horton '87

---

1. Schritt: Berechne kürzeste Wege  $P_{(j,k)}$  zwischen je zwei Knoten  $j, k$ .
  2. Schritt: Für jeden Knoten  $i$  und jede Kante  $(j, k)$  konstruiere den Kreis  $C(i, j, k) := P_{(i,j)} + (j, k) + P_{(i,k)}$ . Lass dabei entstehende nicht-elementare Kreise weg.
  3. Schritt: Sortiere diese Kreise aufsteigend nach ihrer Länge, etwa  $C_1, C_2, \dots, C_\mu$
  4. Schritt: Konstruiere eine Basis mit dem Greedy-Algorithmus:
    - (1)  $\mathcal{B} = \{C_1\}$
    - (2) Solange  $|\mathcal{B}| < \nu$ , wähle in der Reihenfolge  $C_2, C_3, \dots$  den ersten Kreis, der linear unabhängig zu den  $C \in \mathcal{B}$  ist und nehme ihn zu  $\mathcal{B}$  hinzu.
- 

Bevor wir auf die Korrektheit des Algorithmus von Horton eingehen, betrachten wir den Greedy-Algorithmus allgemein. Sei durch  $(E, \mathcal{I})$  ein Mengensystem gegeben, wobei  $E$  eine Grundmenge und  $\mathcal{I}$  eine Teilmenge der Potenzmenge von  $E$  ist. Dieses Mengensystem heißt *Matroid* (über ein Unabhängigkeitssystem), wenn

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (2)  $A \subset B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$ .
- (3)  $A, B \in \mathcal{I}$  mit  $|A| < |B|$  dann  $\exists e \in B \setminus A$  mit  $A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ .

Um dies etwas anschaulicher zu machen betrachten wir zwei Beispiele:

**Example 8.16.** a) Sei  $E$  = die Kantenmenge eines Graphen

$\mathcal{I}$  = System der kreisfreien Mengen von Kanten. Dann bilden  $(E, \mathcal{I})$  ein Matroid.

b) Sei  $E$  eine endliche Menge von Vektoren aus  $K^m$ . Sei  $\mathcal{I}$  alle Mengen, die linear unabhängige Vektoren enthalten. Auch dieses Mengensystem bildet ein Matroid. Die Kreismenge, die im 2. Schritt des Algorithmus von Horton konstruiert wird, bildet ein solches Matroid.

Sei ein Matroid  $(E, \mathcal{I})$  und eine Gewichtsfunktion  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann löst der Greedy-Algorithmus das Problem eine maximale Menge  $\mathcal{A} \in \mathcal{I}$  mit einem minimalen Gewicht zu finden. Eine maximale unabhängige Menge  $\mathcal{A}$  wird auch Basis von  $(E, \mathcal{I})$  genannt. Alle Basen eines Matroids haben die gleiche Länge  $\nu$ . Dies werden wir in Theorem 8.17 beweisen. Zunächst betrachten wir den Greedy-Algorithmus (Alg. 9).

---

**Algorithm 9** Greedy-Algorithmus.
 

---

**Input:**endlicher Matroid  $(E, \mathcal{I})$ , Gewichtsfunktion  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ **Output:**Basis  $\mathcal{A}$  von  $(E, \mathcal{I})$  mit minimalem Gewicht

1. Schritt: Sortiere die Menge  $E$  aufsteigend nach Gewichten:  $\omega(e_1) < \omega(e_2) < \dots < \omega(e_m)$ .
  2. Schritt: Setze  $\mathcal{A} := \{e_1\}$ .
  3. Schritt: Solange  $\mathcal{A} < \nu$ , wähle kleinstes  $e_i$  mit  $\mathcal{A} \cup \{e_i\} \subset \mathcal{I}$ .
  4. Schritt: Setze  $\mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{e_i\}$ .
- 

Eine strikte Ordnung, wie in Schritt 1 gefordert, erreicht man durch Perturbation. Der Greedy-Algorithmus würde für das Beispiel 8.16 a) einen spannenden Baum und für b) eine Basis des  $\text{span}(E)$  finden.

**Theorem 8.17.** *Beim Abbruch des Greedy-Algorithmus ist  $\mathcal{A}$  eine Basis von  $(E, \mathcal{I})$  mit minimalem Gewicht.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_\nu\}$  die vom Algorithmus erzeugte unabhängige Menge. Sei  $\mathcal{B} := \{f_1, f_2, \dots, f_\nu\}$  eine Basis mit minimalem Gewicht. Beide Mengen sind ihrer Gewichte nach aufsteigend sortiert.

Sei  $r$  der erste Index mit  $\omega(e_r) > \omega(f_r)$ . Falls kein solches  $r$  existiert, sind wir fertig. Die Menge  $\{f_1, \dots, f_r\} \in \mathcal{I}$  und  $\{e_1, \dots, e_{r-1}\} \in \mathcal{I}$  und es gilt  $|\{f_1, \dots, f_{r-1}\}| > |\{e_1, \dots, e_r\}|$ . Also existiert ein  $f \in \{f_1, \dots, f_r\} \setminus \{e_1, \dots, e_{r-1}\}$  mit  $\{e_1, \dots, e_{r-1}, f\} \in \mathcal{I}$ . Nach der Wahl von  $e_r$  durch den Greedy-Algorithmus muss  $\omega(e_r) \leq \omega(f) \leq \omega(f_r)$  gelten. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Betrachten wir nun die Korrektheit des Algorithmus von Horton. Wir hatten schon im Beispiel 8.16 gesehen, dass die Kreise, die im Schritt 2 gebildet werden, ein Matroid  $(E, \mathcal{I})$  bilden. Damit läuft der Greedy-Algorithmus darauf exakt. Bleibt zu überlegen, dass  $(E, \mathcal{I})$  eine minimale Kreisbasis enthält. Dies konnte Horton '87 zeigen.

**Theorem 8.18.** *[Horton '87] Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Gewichtsfunktion mit nur echt positiven Werten. Dann enthält die Menge der Kreise, die im Algorithmus 8 2. Schritt konstruiert werden, eine minimale Kreisbasis.*

*Beweis.* ohne Beweis.  $\square$

Die Aufwandbetrachtung ergibt folgendes: Im 1. Schritt werden  $n^2$  kürzeste Wege a  $\mathcal{O}(m \log n)$  berechnet. Wir erhalten maximale  $n \cdot m$  Kreise, die im 3. Schritt sortiert werden. Dies geschieht in  $\mathcal{O}(n \cdot m \cdot \log(n \cdot m))$ . Da maximale  $\nu \leq m$  Test auf Unabhängigkeit durchgeführt werden müssen. Ein solcher Test kann durch Gauß-Elimination einer  $m \times \nu$ - Matrix erfolgen. Der Aufwand beträgt dabei  $\mathcal{O}(m^3)$ . Wir erhalten also eine Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(m^4)$ , wobei diese auf  $\mathcal{O}(m^\omega \cdot n)$  durch die Technik der schnellen Matrixmultiplikation mit  $\omega = 2,376$  verbessert werden kann.

8.3.2. *Kurze Basen in anderen Klassen von Basen.* Wir wollen hier eine kurze Auflistung der verschiedenen Problemklassen betrachten:

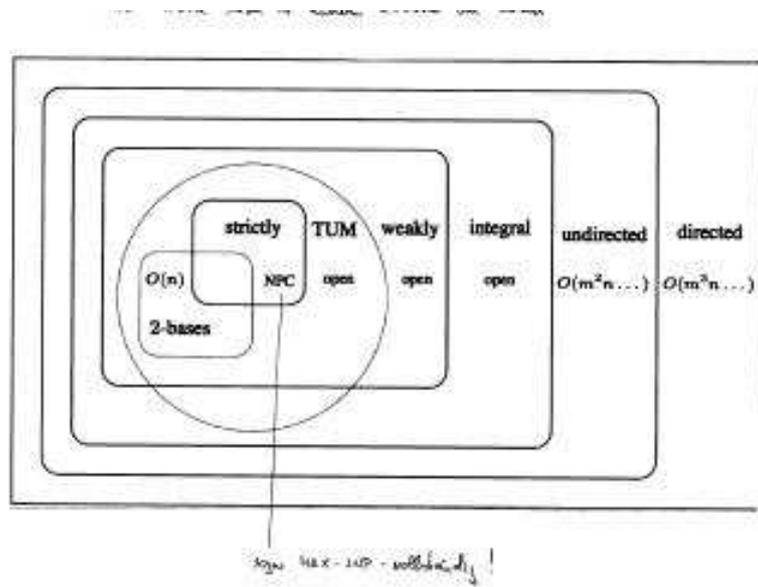


ABBILDUNG 96. Kurze Basen in anderen Klassen von Basen.