

## 7. CHARAKTERISIERUNG PERIODISCHER POTENZIALE

Bisher hatten wir das PESP als MIP der Form

$$(\text{PESP})_{\text{MIP}} \begin{cases} \sum w_a x_a \\ x_a = \pi_j - \pi_i & \forall a = (i, j) \\ l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a & \forall a \in A \\ 0 \leq x_a \leq T - 1 \\ p_a & \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

betrachtet. Die Formulierung basiert auf den Knotenvariablen  $\pi_i$  und den Periodenoffsets  $p_a$ , wobei die Spannungsvariablen  $x_a$  als Hilfsgrößen dienen. Wir hatten aber schon gesehen, dass diese Darstellung schlecht für die Lösbarkeit ist. Im folgenden beschäftigen wir uns deswegen mit der Frage, wie man das Problem nur mit Hilfe von Spannungen darstellen bzw. wie man periodische Spannungen unabhängig von periodischen Potentialdifferenzen charakterisieren kann.

Bevor wir uns mit Spannungen beschäftigen, eine kurze Wiederholung zum Kreis- und Kozykelraum aus ADM I, da wir später sehen werden, dass der Kozykelraum dem Raum der Spannungen entspricht.

Der Kreisraum eines Graphen war definiert als der Vektorraum, der von Inzidenzvektoren einfacher ungerichteter Kreise von  $G$  erzeugt wird (Abb. 81).

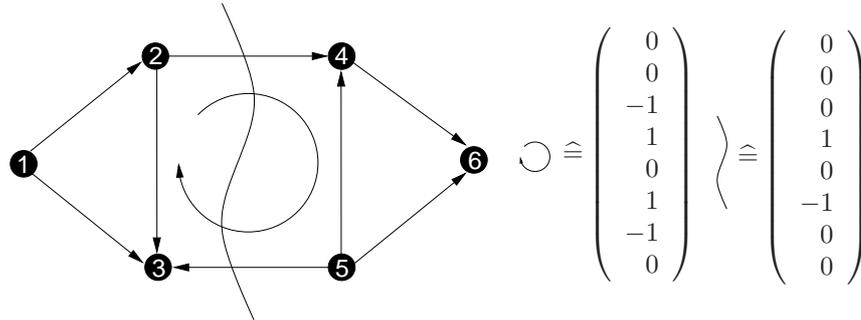


ABBILDUNG 81. Kreis und Schnitt mit zugehörigen Inzidenzvektoren. Dabei sind die Kanten lexikographisch geordnet.

Die Dimension des Zykelraums  $\nu$  ist immer  $m - n + 1$ , falls  $G$  zusammenhängend ist, und die Fundamentalkreise bilden eine kanonische Basis. Zu einem spannenden Baum  $T$  nennt man den durch eine Nichtbaumkante induzierten Kreis einen Fundamentalkreis. Wir gehen im Folgenden immer davon aus, dass  $G$  zusammenhängend ist.

Der Kozykelraum ist der von den Inzidenzvektoren von Schnitten  $\delta(X)$  erzeugte Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{E(G)}$  (Abb. 81). Hier bilden die Fundamentalschnitte eine Basis. Ein Fundamentalschnitt entsteht durch das Löschen einer Baumkante eines spannenden Baumes. Der Zykelraum und Kozykelraum liegen orthogonal zueinander, und es gilt

$$\dim(\text{Zykelraum}) + \dim(\text{Kozykelraum}) = \dim \mathbb{R}^{|E|} = m.$$

Inzidenzvektoren von Kreisen und Schnitten werden mit  $\zeta(C)$  bzw.  $\zeta(\delta(X))$  bezeichnet.

Nachdem wir Grundlagen des Zykel- und Kozykelraums wiederholt haben, gibt das folgende Lemma den Zusammenhang zu aperiodischen Spannungen an.

**Lemma 7.1.** *Die Menge der aperiodischen Spannungen eines Digraphen  $G$  ist gleich dem Kozykelraum von  $G$ .*

*Beweis.* Als erstes beweisen wir folgendes: Sei  $C$  ein gerichteter Kreis mit  $C^+$  =Menge der Vorwärtskanten und  $C^-$  =Menge der Rückwärtskanten und  $\pi$  sei ein Potenzial. Dann gilt

$$\sum_{(i,j) \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{(i,j) \in C^-} (\pi_j - \pi_i) = 0.$$

Wir betrachten dies an einem Beispiel (Abb. 82):

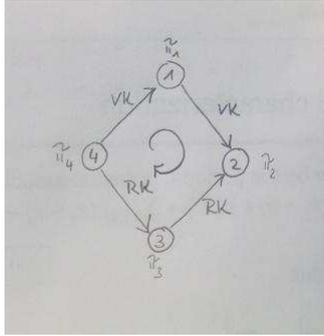


ABBILDUNG 82. Im Kreis  $C$  kommen alle vier Kostensituationen vor.

$C^+ = \{(4, 1), (1, 2)\}$  und  $C^- = \{(3, 2), (4, 3)\}$ . Damit ergibt sich

$$\pi_4 - \pi_1 + \pi_1 - \pi_2 - (\pi_3 - \pi_2 + \pi_4 - \pi_3) = 0.$$

Man kann diesen Sachverhalt auch allgemein zeigen, und geht dabei über die vier Situationen bzgl. der Kanten, die an einem Knoten auftreten können: VK-VK, VK-RK, RK-RK, RK-VK.

Betrachten wir nun die Potenzialdifferenz  $x$ , die durch  $\pi$  mit  $x_{(i,j)} = \pi_j - \pi_i$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle C, x \rangle &= \sum_{(i,j) \in C^+} x_{(i,j)} - \sum_{(i,j) \in C^-} x_{(i,j)} \\ &= \sum_{(i,j) \in C^+} \pi_j - \pi_i - \sum_{(i,j) \in C^-} \pi_j - \pi_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, dass Vektoren von Potenzialdifferenzen orthogonal zum Zykelraum sind.

Als nächstes müssen wir zeigen, dass die Menge der Potenzialdifferenzen  $\mathcal{P}$  einen Vektorraum bzw. einen Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{|E|}$  bilden. Dazu muss gelten: I. für  $x, y \in \mathcal{P} \Rightarrow x + y \in \mathcal{P}$  und II. für  $x \in \mathcal{P}$  und  $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{P}$ .

I: Seien  $x, y$  Potenzialdifferenzen von den Potenzialen  $\pi$  bzw.  $\sigma$ : Betrachte die Kante  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} (x + y)_{(i,j)} &= x_{(i,j)} + y_{(i,j)} = (\pi_j - \pi_i) + (\sigma_j - \sigma_i) \\ &= (\pi_j + \sigma_j) - (\pi_i + \sigma_i) = (\pi + \sigma)_j - (\pi + \sigma)_i. \end{aligned}$$

II: Sei  $x \in \mathcal{P}$  des Potenzials  $\pi$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Betrachte wieder die Kante  $(i, j)$ . Dann gilt:

$$(\lambda x)_{(i,j)} = \lambda x_{(i,j)} = \lambda(\pi_j - \pi_i) = (\lambda\pi)_j - (\lambda\pi)_i.$$

Also ist  $\mathcal{P}$  ein Vektorraum. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass  $\mathcal{P} \supset \text{Kozykelraum}$  gilt. Sei  $X$  ein Schnitt. Dann definiert

$$\pi_i := \begin{cases} 0 & i \in X \\ 1 & i \notin X \end{cases}$$

ein Potenzial. Die durch das Potenzial definierte Potenzialdifferenz entspricht dem Inzidenzvektor des Schnittes  $X$ . Damit ist Lemma 7.1 bewiesen.  $\square$

Betrachten wir jetzt die periodischen Spannungen, die als Potenzialdifferenzen periodischer Potenziale definiert sind. Diese erweisen sich als „nahezu“ orthogonal zum Zykelraum.

**Theorem 7.2.** [Serafini Ukowich 89] Sei  $G$  ein Digraph. Für  $x \in \mathbb{R}^{E(G)}$  sind äquivalent:

- (1)  $x$  ist eine periodische Spannung
- (2)  $x^\top \zeta(C)$  ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit  $T$  für jeden einfachen Kreis  $C$  von  $G$
- (3)  $x^\top \zeta(C)$  ist ein ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit  $T$  für jeden Kreis einer „Baum-Basis“. Mit einer „Baum-Basis“ werden die Fundamentalkreise eines spannenden Baumes von  $G$  bezeichnet.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Sei  $\pi$  das periodische Potenzial zu  $x$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} x^\top \zeta(C) &= \sum_{(i,j) \in C^+} (\pi_j - \pi_i + p_a T) - \sum_{(i,j) \in C^-} (\pi_j - \pi_i + p_a T) \\ &= \sum_{C^+} (\pi_j - \pi_i) + \sum_{C^-} (\pi_j - \pi_i) + \underbrace{z}_{\in \mathbb{Z}} T \\ &= \bar{x}^\top \zeta(C) + zT \end{aligned}$$

mit  $\bar{x}$  =aperiodische Potenzialdifferenz zu  $\pi$ . Nach Lemma 7.1 gilt  $\bar{x}^\top \zeta(C) = 0$  und wir erhalten

$$x^\top \zeta(C) = \bar{x}^\top \zeta(C) + zT = zT.$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Trivial.

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Um zu zeigen, dass  $x$  eine periodische Spannung ist, müssen wir ein Potenzial  $\pi$  finden, so dass  $x_{(i,j)} = \pi_j - \pi_i + p_{(i,j)} T$  gilt.

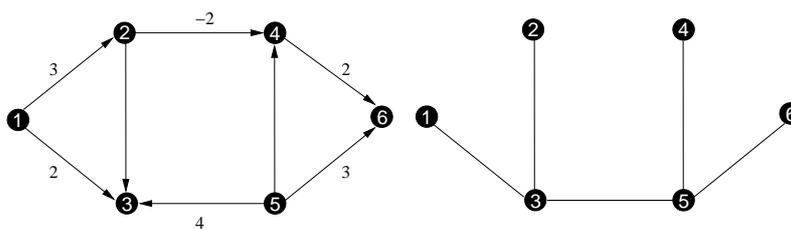


ABBILDUNG 83. Die Potenzialdifferenz  $x$  erfüllt (3).

Nutze den Baum  $B$  zur Definition eines Potenzials  $\pi$  zu  $x$ . Bestimme dazu einen beliebigen Knoten  $s$  als Wurzel und setze  $\pi_s = 0$ . Bestimme die weiteren Werte  $\pi_j$  entlang  $B$ , so dass  $\pi_j - \pi_i = x_{ij}$  auf Baumkanten gilt (Abb. 83). Das Potenzial  $\pi$  ist nach Wahl von  $\pi_s = 0$  im Startknoten  $s$  eindeutig bestimmt. Damit sind die Bedingungen

$$x_{(i,j)} = \pi_j - \pi_i + p_a T$$

mit  $p_a = 0$  für alle Baumkanten erfüllt.

Für Nichtbaumkanten  $(u, v)$  gilt bzgl. des von ihnen erzeugten Fundamentalkreises  $C$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) \\
 &= \sum_{\substack{a \in C^+ \\ a \neq (u,v)}} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) + (\pi_v - \pi_u) \\
 &= \underbrace{\sum_{\substack{a \in C^+ \\ a \neq (u,v)}} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a}_{=y_c T - x_{uv}} + (\pi_v - \pi_u) \\
 &= y_c T - x_{uv} + (\pi_v - \pi_u)
 \end{aligned}$$

mit  $y_c$  ist das Vielfache gemäß (3). Daraus folgt  $x_{uv} = \pi_v - \pi_u - y_c T$ . Also gilt  $x$  ist periodisches Potenzial.  $\square$

Die Charakterisierung in (3) von Satz 7.2 gilt nicht für beliebige Basen.

**Example 7.3.** Wir betrachten den folgenden Graphen  $G$  (Abb. 84).

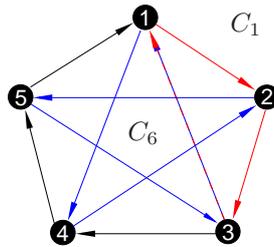


ABBILDUNG 84. Die Basis  $C_1, \dots, C_5, C_6$  kann (2) nicht garantieren.

Die Basis, die wir betrachten wollen, besteht aus 5 äußeren Kreisen  $C_1, \dots, C_5$ , die jeweils aus zwei äußeren und einer inneren Kante bestehen, und dem Innenkreis  $C_6$ . Beschreiben wir die Basis als Matrix

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} (1,2) & (2,3) & (3,4) & (4,5) & (5,1) & (3,1) & (4,2) & (5,3) & (1,4) & (2,5) \end{matrix} \\
 \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{matrix} \left( \begin{array}{cccccccccc}
 1 & & & & & 1 & & & & \\
 & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & & 1 & \\
 & & & & 1 & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Der äußere Kreis  $C = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \dots + \frac{1}{2}C_5 - \frac{1}{2}C_6$  ist als Linearkombination der Basiskreise nur mit nicht ganzzahligen Koeffizienten darstellbar. Dann gilt  $x^\top \xi(C) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2}x^\top \xi(C_i) - \frac{1}{2}x^\top \xi(C_6)$ . Betrachten wir  $T = 60$ . Betrachte die Potenzialdifferenz:  $x^\top = (18, 18, 18, 18, 18, 24, 24, 24, 24, 24)$ . Dann gilt  $\langle x, C_i \rangle = 18 + 18 + 24 = 60 = T$  für  $i = 1, \dots, 5$  und für  $\langle x, C_6 \rangle$  erhalten wir den Wert  $120 = 2T$ . Allerdings gilt  $x^\top C = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}2T = \frac{3}{2}T$ . Damit ist die Äquivalenz von (2) und (3) verletzt.

Das Beispiel zeigt, dass (3)  $\Rightarrow$  (2) für beliebige Basen in (3) verloren gehen kann. Hinreichend für (3)  $\Rightarrow$  (2) sind ganzzahlige Basen des Zykelraums. *Ganzzahlige Basen* des Zykelraums sind Basen, die jeden Kreis als ganzzahlige Linearkombination darstellen.

*Conclusion 7.4* (Liebchen & Peeters '03). Sei  $\mathcal{B}$  eine ganzzahlige Basis und  $x \in \mathbb{R}^m$ . Falls  $x^\top C = q_C T$  für alle  $C \in \mathcal{B}$ , dann ist die Bedingung (3) aus Satz 7.2 erfüllt und somit ist  $x$  ein zulässiges Potenzial.

*Beweis.* Wir zeigen, wenn  $x^\top C = p_C T$  für eine ganzzahlige Basis gilt, dann gilt dies auch für eine Baum-Basis. Auf diese Baumbasis können wir dann Satz 7.2 anwenden.

Sei  $C$  ein Kreis aus einer Baum-Basis. Dann gilt  $\zeta(C) = \sum_k \lambda_k \zeta(C_k)$ , wobei  $C_k$  die Kreise aus der ganzzahligen Basis sind und  $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ . Bilden wir nun das Skalarprodukt

$$x^\top \zeta(C) = \sum_k \lambda_k \underbrace{x^\top \zeta(C_k)}_{=z_k T} = \left( \sum_k \lambda_k z_k \right) T.$$

Da  $\sum_k \lambda_k z_k \in \mathbb{Z}$ , gilt (3) aus Satz 7.2 auch für eine Baum-Basis.  $\square$

Daher stellt sich die Frage, wie man ganzzahlige Basen charakterisieren kann. Dazu definieren wir die *Zykelmatrix*  $\Gamma$  einer Basis  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_\nu\}$  mit  $\nu = m - n + 1$  als die Kanten-Kreis-Inzidenzmatrix:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_\nu \\ \zeta(C_1)_1 & \cdots & \zeta(C_i)_1 & \cdots & \zeta(C_\nu)_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \zeta(C_1)_j & \cdots & \zeta(C_i)_j & \cdots & \zeta(C_\nu)_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \zeta(C_1)_m & \cdots & \zeta(C_i)_m & \cdots & \zeta(C_\nu)_m \end{pmatrix}$$

Zur Vorbereitung der Charakterisierung folgt noch ein wichtiges Lemma.

**Lemma 7.5.** Seien  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  nichtsinguläre  $\nu \times \nu$  Teilmatrizen von  $\Gamma$ . Dann gilt  $\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2$ .

*Beweis.* Wir zeigen erst mal eine Hilfsaussage:

*Claim 7.6.* Eine Teilmenge  $\Gamma'$  von  $\nu$  Zeilen von  $\Gamma$  ist genau dann (maximal) linear unabhängig, wenn die entsprechenden Kanten Nichtbaumkanten eines spannenden Baumes sind.

*Beweis Claim 7.6:* „ $\Leftarrow$ “ Sei  $T$  ein spannender Baum und  $a_1, \dots, a_\nu$  die Nichtbaumkanten. Sei  $\Phi$  die Kanten-Fundamentalkreis-Matrix bzgl.  $T$ . Seien o.B.d.A die letzten Zeilen von  $\Gamma$  und  $\Phi$  durch  $a_1, \dots, a_\nu$  bestimmt. Es gibt eine nichtsinguläre  $\nu \times \nu$  Matrix  $R$ , die Basiswechsellmatrix, mit  $\Gamma R = \Phi$  (Abb. 85). Dann muss also  $\Gamma' R = I$  gelten, da die Teilmatrix von  $\Phi$  zu  $a_1, \dots, a_\nu$  die Einheitsmatrix ist.

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \hline \\ a_1 \\ | \\ a_\nu \end{array} \cdot R = \begin{array}{c} \Phi \\ \hline \\ \mathbf{1} \\ \diagdown \\ \mathbf{1} \end{array}$$

ABBILDUNG 85. Da  $\Gamma R = \Phi$  gilt, muss  $\Gamma' R = I$  erfüllt sein.

Das bedeutet aber, dass  $R = (\Gamma')^{-1}$  gilt und damit  $\Gamma'$  nichtsingulär ist. Damit sind die Zeilen von  $\Gamma'$  linear unabhängig.

„ $\Rightarrow$ “ Die Matrix  $\Gamma$  ist gegeben. Wir haben eine Menge linear unabhängiger Zeilen  $a_1, \dots, a_\nu$ , die uns die Matrix  $\Gamma'$  definieren. Wir müssen jetzt zeigen, dass die restlichen  $n - 1$  Kanten  $b_1, \dots, b_{n-1}$  einen spannenden Baum bilden. Wir nehmen an, dass dies nicht der Fall ist. Also enthalten diese Kanten einen Kreis  $C$  (Abb. 86).

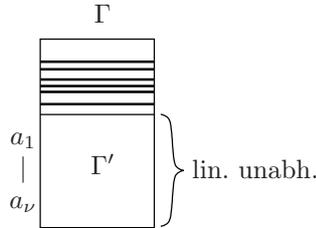


ABBILDUNG 86. Die Kanten  $a_1, \dots, a_\nu$  sind linear unabhängig und wir gehen davon aus, dass die restlichen, schwarzen Kanten einen Kreis bilden.

Der Inzidenzvektor  $\zeta(C)$  ist eindeutig als nicht triviale Linearkombination der Kreise aus  $\Gamma$  darstellbar. Also gibt es einen Vektor  $\lambda_C \neq 0$  mit  $\Gamma \cdot \lambda_C = \zeta(C)$ . Der Inzidenzvektor hat nur an den Koordinaten der Kanten  $b_1, \dots, b_{n-1}$  Werte ungleich Null. Streichen wir in  $\Gamma$  und  $\zeta(C)$  die Kanten  $b_1, \dots, b_{n-1}$ , so bleibt  $\Gamma' \cdot \lambda_C = 0$  übrig. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass die Zeilen aus  $\Gamma'$  linear unabhängig sind.  $\triangle$

Wir wissen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sind nicht singuläre  $\nu \times \nu$  Teilmatrizen von  $\Gamma$ . Aus Claim (7.6) wissen wir, dass die Zeilen von  $\Gamma_1$  die Nichtbaumkanten  $a_1, \dots, a_\nu$  eines spannenden Baumes  $T_1$  entsprechen. Sei  $\Phi_1$  die Kante-Fundamentalkreis-Inzidenzmatrix von  $T_1$ . Dabei  $\Phi_1$  eine vollständig unimodulare Matrix. Außerdem gilt,  $\Phi_1 \Gamma_1 = \Gamma$  (Abb. 87).

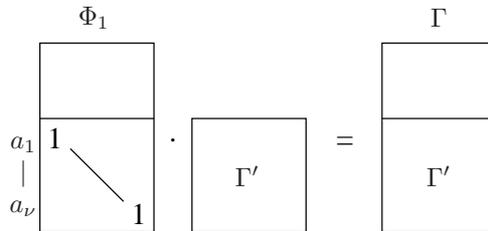


ABBILDUNG 87. Für  $\Phi_1$  gilt  $\Phi_1 \Gamma_1 = \Gamma$ .

Betrachte in  $\Phi_1$  die Zeilen zu  $\Gamma_2$ . Bezeichne mit  $\Phi_1^0$ , die Matrix  $\Phi_1$  eingeschränkt auf die Zeilen von  $\Gamma_2$ . Dann gilt

$$\Phi_1^0 \cdot \Gamma_1 = \Gamma_2,$$

da  $\Gamma_2$  eine Teilmatrix von  $\Gamma$  ist. Da  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  nicht singulär sind, gilt  $\det \Phi_1^0 \det \Gamma_1 = \det \Gamma_2 \neq 0$ . Also gilt  $\det \Phi_1^0 \neq 0$ , also muss auch  $\Phi_1^0$  singulär sein. Die ganze Matrix  $\Phi_1$  ist vollständig unimodular, also gilt  $\det \Phi_1^0 = \pm 1$  und daraus folgt  $\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2$ .  $\square$

Wegen Lemma 7.5 ist folgende Definition sinnvoll: Sei  $\mathcal{C}$  eine Menge von  $\nu$  Kreisen von  $G$  und sei  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  die Zykelmatrix von  $\mathcal{C}$ . Dann heißt

$$\det \mathcal{C} := |\det \Gamma'|$$

die Determinante von  $\mathcal{C}$ , wobei  $\Gamma'$  aus  $\Gamma$  durch Streichen von Zeilen zu Nichtbaumkanten eines spannenden Baumes von  $G$  entsteht.

*Conclusion 7.7.* Eine Menge aus  $\nu$  Kreisen  $\mathcal{C}$  ist genau dann eine Basis des Zykelraums, wenn  $\det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+$ .

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Sei  $\det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+$ , dann gilt  $\det \mathcal{C} \neq 0$ . Damit ist  $\Gamma'$  nicht singulär. Also sind die Spalten von  $\Gamma'$  linear unabhängig und somit auch die Kreise aus  $\mathcal{C}$ . Da  $|\mathcal{C}| = \nu$  gilt, muss  $\mathcal{C}$  eine Basis des Zykelraums sein.

„ $\Rightarrow$ “: Die Kreise von  $\mathcal{C}$  sind linear unabhängig. Also müssen auch die Spalten von  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  linear unabhängig sein. Damit gilt  $\det \Gamma' \neq 0$ . Da  $\Gamma'$  ganzzahlig ist, ist dann auch  $|\det \Gamma'| = \det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+$ .  $\square$

**Theorem 7.8.** [Liebchen '03] Eine Menge von  $\nu$  Kreisen  $\mathcal{C}$  ist genau dann eine ganzzahlige Basis, wenn  $\det \mathcal{C} = 1$  gilt.

*Beweis.* Für den Beweis brauchen wir folgende Satz aus der linearen Algebra: Sei  $B$  eine ganzzahlige Matrix. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (1)  $|\det B| = 1$
- (2) Die Matrix  $B^{-1}$  ist ganzzahlig

Matrizen, die diese Bedingung erfüllen, nennt man auch *unimodular*.

Sei nun  $C$  ein beliebiger Kreis aus  $G$ ,  $\lambda_C$  der Vektor der Koeffizienten in der Linearkombination bzgl. Basis  $\mathcal{C}$ , d.h.  $\Gamma_{\mathcal{C}} \lambda_C = \zeta(C)$ . Zur Berechnung von  $\lambda_C$  erhalten wir ein überbestimmtes Gleichungssystem, da die Matrix  $\Gamma_{\mathcal{C}}$   $m$  Zeilen und  $\nu$  Spalten hat. Wir können das Gleichungssystem also auf  $\nu$  linear unabhängige Zeilen beschränken. Dafür nehmen wir gerade die Zeilen der Nichtbaumkanten  $a_1, \dots, a_\nu$  bzgl. eines spannenden Baum  $T$ . Die Einschränkung bezeichnen wir mit  $\Gamma^0$ . Dann gilt

$$(16) \quad \Gamma_{\mathcal{C}}^0 \lambda_C = \zeta(C)^0.$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\det \mathcal{C} = 1$ , dann gilt  $\det \Gamma_{\mathcal{C}}^0 = \pm 1$ . Da  $\zeta(C)^0$  ganzzahlig ist und sich die Determinante einer Matrix nur durch Addition und Multiplikation ihrer Elemente berechnet, muss auch  $\det(\Gamma_{\mathcal{C}}^0)_j$  ganzzahlig sein. Nach der Cramerschen Regel erhalten wir

$$(\lambda_C)_j = \frac{\det(\Gamma_{\mathcal{C}}^0)_j}{\det \Gamma_{\mathcal{C}}^0} = z \in \mathbb{Z}.$$

Also kann jeder Kreis als ganzzahlige Linearkombination von  $\mathcal{C}$  dargestellt werden.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $\mathcal{C}$  eine Basis und ganzzahlig. Dann gilt nach Satz 7.7, dass  $|\det \Gamma_{\mathcal{C}}^0| \in \mathbb{Z}_+$  und  $\lambda_C$  ganzzahlig ist. Betrachten wir wieder das Gleichungssystem  $\Gamma_{\mathcal{C}} \lambda_{C_{a_i}} = \zeta(C_{a_i})$ , wobei  $C_{a_i}$  den Fundamentalkreis bzgl. der Nichtbaumkante  $a_i$  bezeichnet (Abb. 88).

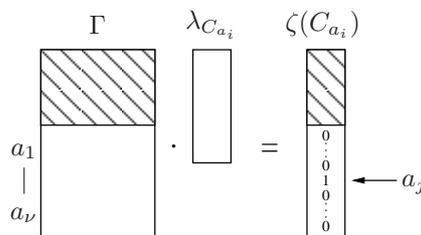


ABBILDUNG 88. Es gilt  $\Gamma \lambda_{C_{a_i}} = \zeta(C_{a_i})$ .

Beschränken wir das Gleichungssystem wieder auf linear unabhängige Zeilen, erhalten wir  $\Gamma_{\mathcal{C}}^0 \lambda_{C_{a_i}} = \zeta(C_{a_i})^0$ . Dabei gilt  $\zeta(C_{a_i})^0 = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , wobei die 1 an

der Stelle der Kante  $a_i$  steht. Die  $i$ -te Spalte  $(\Gamma_{\mathcal{C}}^0)^{-1}$  läßt sich dann durch

$$\lambda_C = (\Gamma_{\mathcal{C}}^0)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\Gamma_{\mathcal{C}}^0)^{-1}_j$$

berechnen. Also ist  $(\Gamma_{\mathcal{C}}^{-1})$  ganzzahlig. Dann muss mit dem Satz aus der Algebra  $|\det \Gamma_{\mathcal{C}}^0| = 1$  gelten und somit erhalten wir  $\det \mathcal{C} = 1$ .  $\square$

Diese Erkenntnisse führen zu einer neuer MIP-Formulierung des PESP. Diese basiert auf dem Zusammenhang

$$\Gamma_{\mathcal{C}}^{\top} x = T \cdot q$$

wobei  $\Gamma$  die Zykelmatrix der ganzzahligen Kreisbasis  $\mathcal{C}$ ,  $x$  die Kantenbewertung  $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ ,  $T$  die die Taktzeit und  $q = (q_{C_1}, \dots, q_{C_\nu})^{\top}$  ein ganzzahligen Vielfache der Taktzeit der Kreise aus  $\mathcal{C}$  ist. In der Gleichung ist die Kantenbewertung  $x$  und ev. die  $q$  unbekannt. Da  $\mathcal{C}$  eine ganzzahlige Kreisbasis ist, garantiert die Gleichung nach der Folgerung 7.4, dass  $x$  ein periodisches Potenzial ist. Wir brauchen also keine Knotenpotenzial mehr betrachten. Dieses ganze definiert uns ein neues MIP auf Basis von Kreisvariablen  $q_{\mathcal{C}}$ :

$$(\text{PESP})_{\text{MIP}(\mathcal{C})} \begin{cases} \min \sum w_a x_a \\ \Gamma^{\top} x & = Tq \\ l_a \leq x_a \leq u_a & \forall a \in A \\ q & \in \mathbb{Z}^{\nu}. \end{cases}$$

**Lemma 7.9.** *Ist  $q$  bekannt, so ergibt sich  $x$  aus  $(\text{PESP})_{\text{MIP}(\text{SP})}$  in polynomialer Zeit und ist ebenfalls ganzzahlig.*

*Beweis.* Sei  $q$  ganzzahlig und fest gegeben. Dann wird  $x$  durch das Gleichungssystem  $\Gamma^{\top} x = T \cdot q$  bestimmt. Dies ist polynomial lösbar, z.B. mit Gauss-Elimination. Außerdem wissen wir, dass  $\det \Gamma' = 1$  ist. Dann ergibt sich mit der Cramerschen Regel, dass  $x$  ganzzahlig ist.  $\square$

Bevor wir uns aber mit der Lösung des  $\text{PESP}_{\text{MIP}(\text{SP})}$  beschäftigen, müssen wir eine ganzzahlige Kreisbasis finden. Der folgende Satz gibt drei Kreisklassen an, die ganzzahlige Basen bilden:

**Theorem 7.10.** *Die folgenden Kreisbasen sind ganzzahlige Basen:*

- (1) *die Fundamentalkreise bzgl. eines spannenden Baumes (Fundamentale Kreisbasen)*
- (2) *jede Menge von  $\nu$  Kreisen  $C_1, \dots, C_\nu$  mit  $C_k \setminus \cup_{i=1, \dots, k-1} C_i \neq \emptyset$  (Schwach Fundamentale Basen)*
- (3) *die Menge der Facetten (außer der äußeren) eines planar eingebetteten Graphen (2-Basis)*

Der Name 2-Basis ergibt sich, weil jede innere Kante genau zu zwei Kreisen der Kreisbasis gehört.

**Example 7.11.** Basen aus einer Klasse müssen nicht in der Klasse der anderen liegen. Den folgenden planaren Graphen mit der Kreisbasis  $C_1, C_2, C_3, C_4$  (Abb. 89).

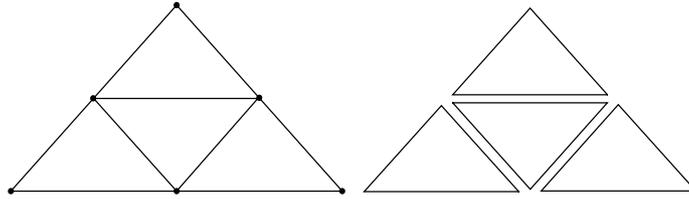


ABBILDUNG 89. Graph (links) mit 2-Kreisbasis (rechts).

Diese ist zwar eine 2-Basis, aber sie ist keine Fundamentalbasis. In einer Fundamentalbasis, besitzt jeder Kreis eine Kante, die nur zu diesem Kreis gehört. In unserem Fall hat der Kreis  $C_3$  keine private Kante. Dagegen ist die Basis auch eine Schwache Fundamental Basis.

Im folgenden Kapitel werden wir uns mit der Frage beschäftigen, welcher der ganzzahligen Basen am besten zum Lösen des PESP Problems geeignet sind.