

Teil 2. Periodic Event Scheduling und Taktfahrplanung

6. PERIODIC EVENT SCHEDULING MODELL (PESP)

In diesem Kapitel werden wir uns mit dem Periodic Event Scheduling beschäftigen. Um das abstrakte Modell mit Leben zu füllen, betrachten wir zu erst ein motivierende Beispiel. Geben sind verschiedene Linien von U-Bahnen mit Bahnhöfen und weiteren wichtigen Punkten, wie Kreuzungen, Weichen usw. (Abb. 71). Außerdem sind Fahrzeiten zwischen den Punkten bekannt. Gesucht sind dann Ankunfts- und Abfahrzeiten an den ausgewählten Punkten, die periodisch wiederholt bzgl. einer Taktzeit T sind, gewisse zeitliche Nebenbedingungen einhalten und eine Zielfunktion minimieren. Die Taktzeit hängt von dem jeweiligen Problem ab. Bei der Deutschen Bahn können sie 1 bis 2 Stunden betragen, bei der U-Bahn hingegen nur 10 Minuten. Als Zielfunktion kommt z.B. die gewichtete Summe der Umsteigezeiten oder die Anzahl der Züge in Frage.

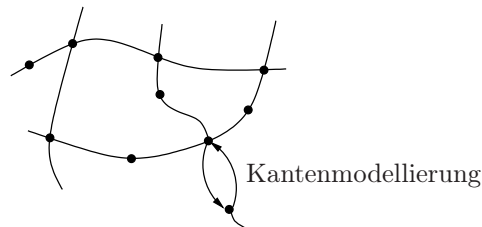


ABBILDUNG 71. Streckennetz

Betrachten wir dieses Liniennetz mit wichtigen Punkten genauer, so definiert es uns einen Digraphen. Die wichtigen Punkte bilden die Knoten, die Abschnitte entlang einer gerichteten Linie zwischen zwei solcher wichtigen Punkte, bilden die Kanten.

Für jede Kante (i, j) ist die Fahrzeit bis auf gewisse Unsicherheiten bekannt. Wir erhalten also für jede Kante eine untere Schranke ℓ_{ij} , die angibt wie lange ein Zug mindestens braucht, und u_{ij} die Fahrzeit, die ein Zug höchstens brauchen darf. Bezeichnen wir mit π_i bzw. π_j die Abfahrt in i bzw. die Ankunftszeit in j , so ergibt sich $\ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij}$ (Abb. 72).

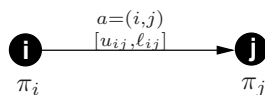


ABBILDUNG 72. Kante mit Ereignissen.

Jetzt soll sich der zu erstellende Fahrplan periodisch wiederholen z.B. mit $T = 60$ min. Wir wollen die Fahrzeiten also nicht mehr durch 1 : 45 Uhr oder 0 : 30 angeben, sondern betrachten nur noch $\pi_i = 45$ bzw. $\pi_j = 30$. Die Ungleichung $\ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij}$ erfüllt jetzt nicht mehr das Gewünschte. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

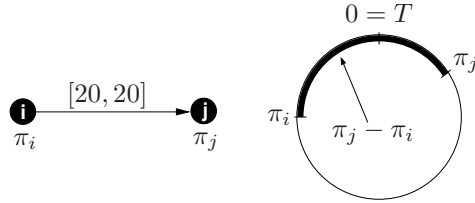


ABBILDUNG 73. Um von i nach j zu kommen, braucht der Zug genau 20 Minuten.

Auf der Kante (i, j) sind $[\ell_{ij}, u_{ij}] = [20, 20]$ vorgegeben (Abb. 73). Aus vorherigen Betrachtung erhalten wir $\pi_i = 50$. Gehen wir jetzt von π_i noch mal 20 Zeiteinheiten weiter, so würden wir $\pi_j = 10$ erhalten. In der Praxis wäre dies zulässig, allerdings würde $\pi_j - \pi_i = -40$ die Ungleichung $\ell_{ij} = 20 \leq \pi_j - \pi_i$ nicht erfüllen.

Um diesem Problem abzuhelpfen, fordern wir, dass der Fahrplan π die zeitliche Nebenbedingung

$$\ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij}T \leq u_{ij}$$

erfüllt. Dabei ist p_{ij} eine beliebige Konstante aus \mathbb{Z} und wird als *Periodenoffset* bezeichnet. In unserm Beispiel würden $\pi_i = 50$ und $\pi_j = 10$ mit $p_{ij} = 1$ die Ungleichung erfüllen. Dieses Problem aus der Praxis gehört in die Klasse der Periodic Event Sceduling Probleme.

Das Periodic Event Sceduling Problem (PESP) wurde 1989 von Serafini und Ukovich eingeführt und folgendermaßen definiert: Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$ mit Kantenrestriktionen $\Delta_{ij} = [\ell_{ij}, u_{ij}]$ und einer Zahl T . Gesucht ist ein Potenzial $\pi \in \mathbb{R}^{|V|}$, das

$$\ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij}T \leq u_{ij}$$

für alle Kanten $(i, j) \in A$ erfüllt. Aus dem Praxisbezug abgeleitet, wird T auch mit Taktzeit und π mit Fahrplan bezeichnet.

6.1. Der Kern des mathematischen Modells (PESP). Graphentheoretische gehört das PESP in die Klasse der zulässigen Potenzialprobleme. Betrachten wir zuerst den *aperiodischen Fall*, d.h. die Zeit verläuft linear.

Sei ein Digraph $G = (V, A)$ und Schranken ℓ_{ij}, u_{ij} für jede Kante gegeben. Gesucht ist dann ein zulässiges Potenzial $\pi, \pi_j \in \mathbb{R}$ mit $\pi_j - \pi_i \in [\ell_{ij}, u_{ij}] \forall a = (i, j)$. Das Problem läßt sich auf ein kürzestes Wegeproblem reduzieren. Dazu wird jeder Kante (i, j) mit ℓ_{ij}, u_{ij} aus dem Graphen G die Kante (j, i) hinzugefügt, wobei die Kante (i, j) das Gewicht $\mu_{ij} := u_{ij}$ und die Kante (j, i) das Gewicht $\mu_{ji} := -\ell_{ij}$ erhält. Den neuen Graphen nennen wir \bar{G} .

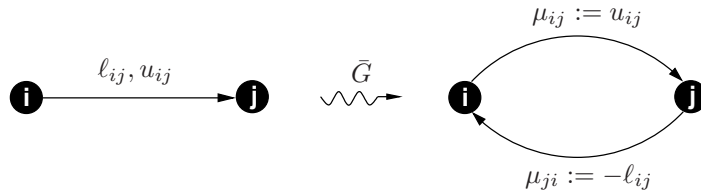


ABBILDUNG 74. Jede Kante aus G wird in \bar{G} verdoppelt.

Claim 6.1. Ein KnotenPotenzial π ist genau dann zulässig wenn im Graphen \bar{G} für alle Kanten (i, j) die Bedingung $\pi_j - \pi_i \leq \mu_{ij}$ erfüllt ist.

Beweis. Betrachten wir ein Potenzial π .

$$\begin{aligned}
& \pi \text{ ist zulässig} \\
\Leftrightarrow & \ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} \text{ für alle } (i, j) \in G \\
\Leftrightarrow & \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} = \mu_{ij} \text{ und } \pi_i - \pi_j \leq -\ell_{ij} = \mu_{ij}
\end{aligned}$$

□

Weiter erhalten wir das folgende Theorem:

Theorem 6.2. *Zur Existenz und Berechnung von aperiodischen Potenzialen:*

- (1) *Es existiert genau dann ein zulässiges Potenzial π , wenn \overline{G} keinen negativen Zykel enthält.*
- (2) *Falls ein zulässiges Potenzial π existiert, so kann π folgendermaßen konstruiert werden:*
 - (a) *Führe Knoten s ein mit Kanten (s, v) zu jedem $v \in V(G)$ ein mit $c(s, v) = 0$*
 - (b) *Setze $\pi(v) :=$ kürzeste Weglänge von s nach v*

Beweis. (1) „ \Rightarrow “ Beweis durch Widerspruch. Sei π ein zulässiges Potenzial. Wir nehmen an, es existiert ein negativer Zykel mit Knoten $v_1, \dots, v_k = v_1$. Also gilt $\sum_{i=1}^{k-1} \mu_{v_{i+1}v_i} < 0$. Da π zulässig ist, ist die Gleichung $\pi_j - \pi_i \leq \mu_{ij}$ für alle Kanten (i, j) erfüllt. Damit erhalten wir

$$\pi_i \leq \pi_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{v_{i+1}v_i}$$

für alle $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Für $j = k-1$ gilt insbesondere, $\pi_k = \pi_1 \leq \pi_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i < \pi_1$ und damit erhalten wir einen Widerspruch.

„ \Leftarrow “ Wir fügen einfach einen neuen Knoten s ein, der mit jedem Knoten durch eine Kante der Länge 0 verbunden ist. Dann erhalten wir einen kürzesten Wegebau, der wohl definiert ist, da wir keine negativen Zykel haben. Definiere $\pi_i :=$ Länge des kürzesten Weges von s nach i . Für Baumkanten ist somit die Gleichung $\pi_j - \pi_i \leq \mu_{ij}$ trivialerweise erfüllt. Falls für eine Nichtbaumkanten $\pi_j - \pi_i > \mu_{ij}$ gelten würde, dann wäre $\pi_i - \mu_{ij} < \pi_j$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass π_j die Länge eines kürzesten Weges ist. □

Satz 6.2 sagt also aus, dass es reicht ein kürzeste Wege Problem zu lösen, um ein aperiodisches Potenzial zu berechnen. Aus diesem Zusammenhang läßt sich auch folgern, dass wir für ganzzahlige u_{ij} und ℓ_{ij} auch ganzzahlige Potenziale π_i erhalten.

Betrachten wir nun das zulässige Potenzialprobleme im periodischen Fall zur Taktzeit T .

Definition 6.3. Ein *periodische Potenzial* mit Taktzeit T ist ein Zeitpunkt π_i für jeden Knoten i mit

$$\pi_i = \{\pi_i^0, \pi_i^0 \pm T, \pi_i^0 \pm 2T, \dots\}$$

mit $\pi_i^0 \in [0, T[$ oder $\pi_i \bmod T \in [0, T[$.

Ein *zulässiges periodisches Potenzial* bzgl. ℓ_{ij}, u_{ij} erfüllt

$$(14) \quad \ell_{ij} \leq \underbrace{\pi_j}_{\pi_j^0 + k_j T} - \underbrace{\pi_i}_{\pi_i^0 + k_i T} \leq u_{ij}$$

für alle Kanten mit $k_j, k_i \in \mathbb{Z}$.

Die Zulässigkeitsbedingung (14) ist äquivalent zu

$$(15) \quad \ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij}T \leq u_{ij}.$$

Für die Gleichung (15) führen wir die Schreibweise

$$\pi_j - \pi_i \in [\ell_{ij}, u_{ij}]_T$$

ein und definieren die Modulo Projektion durch $d \bmod T := \min\{d + zT \geq 0, z \in \mathbb{Z}\}$. Dann gilt, dass die Gleichung (15) äquivalent zu

$$(\pi_j - \pi_i - \ell_{ij}) \bmod T \leq u_{ij} - \ell_{ij}$$

ist.

Zur Wiederholung definieren wir hier das *Periodic Event Scheduling Problem* noch mal: Sei ein Digraph D mit Kantenrestriktionen $\Delta_{(i,j)} = [\ell_{i,j}, u_{i,j}]$ und einer Taktzeit T gegeben. Gesucht ist ein Fahrplan π , d.h. π ist ein zulässiges periodische Potenzial, dass

$$\pi_j - \pi_i \in [\ell_{ij}, u_{ij}]_T$$

erfüllt.

Zwischen einem aperiodischen zulässigen Potenzial und einem periodischen zulässigen Potenzial lässt sich folgender Zusammenhang herstellen.

Note 6.4. Jedes aperiodische zulässige Potenzial ist auch zulässig periodisch bzgl. der gleichen Schranken $[u_{ij}, \ell_{ij}]$.

Beweis. Sei π ein zulässiges aperiodisches Potenzial bzgl. Δ_{ij} . Dann gilt

$$\ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij}$$

für jede Kante (i, j) . Daraus folgt

$$\ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij}T \leq u_{ij}$$

mit $p_{(i,j)} = 0 \in \mathbb{Z}$. Also ist π ein zulässig periodisches Potenzial. \square

Note 6.5. Die Umkehrung gilt nicht (Abb. 75):

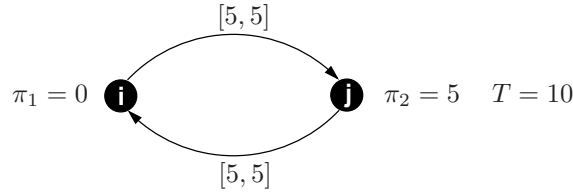


ABBILDUNG 75. Das Potenzial $\pi = (0, 5)$ ist zwar periodisch zulässig, allerdings nicht aperiodisch.

Das Potenzial $\pi = (0, 5)$ erfüllt die Zulässigkeitsbedingung 15. Allerdings ist diese Gleichung für die Kante b im aperiodischen Fall nicht erfüllt.

Insgesamt kann man noch feststellen, dass die Suche nach einem zulässigen periodischen Potenzial der Suche nach einem aperiodischen Potenzial mit Periodenoffsets p_{ij} entspricht. Allerdings sind die Periodenoffsets normalerweise nicht bekannt. Ist dies jedoch der Fall, so kann man durch das Lösen des aperiodischen Problems mit Kantengewichten $\ell_{ij} - p_{ij}T$ und $u_{ij} - p_{ij}T$ das periodische Problem lösen. Zusammengefasst erhalten wir, dass das periodische Problem schwerer ist als das aperiodische.

Bisher haben wir das PESP durch Knotenpotenziale ausgedrückt. Wir wollen hier noch eine Formulierung über die Spannung betrachten. Eine Spannungen bzw. die Potenzialdifferenzen x ist ein Vektor aus $\mathbb{R}^{|E|}$, der jeder Kante eine Variable x_{ij} zuordnet. Eine *aperiodische Spannung* entspricht dann der Potenzialdifferenz $x_{ij} = \pi_j - \pi_i$. Eine *periodische Spannung* ist eine Spannung, die als Potenzialdifferenz eines periodischen Potenzial erzeugt wird, d.h. $x_{ij} = \pi_j^0 + k_jT - (\pi_i^0 + k_iT)$ für geeignete k_j, k_i .

Eine zulässige periodische Spannung x erfüllt

$$\ell_{ij} \leq x_{ij} + p_{ij}T \leq u_{ij} \quad \forall(i, j).$$

Später werden wir das Spannungsmodell genauer betrachten und vor allem eine Möglichkeit kennen lernen zu bestimmen, ob ein Vektor x eine zulässige periodische Spannung ist, ohne den Umweg über Potenziale zu gehen.

6.2. Modellierungsmöglichkeiten mit dem PESP. Am Anfang des Kapitels hatten wir uns grob überlegt, was für ein Zusammenhang zwischen einem Liniennetz bzw. der Taktfahrplanung und dem PESP besteht. Im folgenden betrachten wir, wie wir aus einem Liniennetz einen Graphen bilden können, der als Grundlage für das PESP dient.

Das allgemeine Modell (Abb. 76):

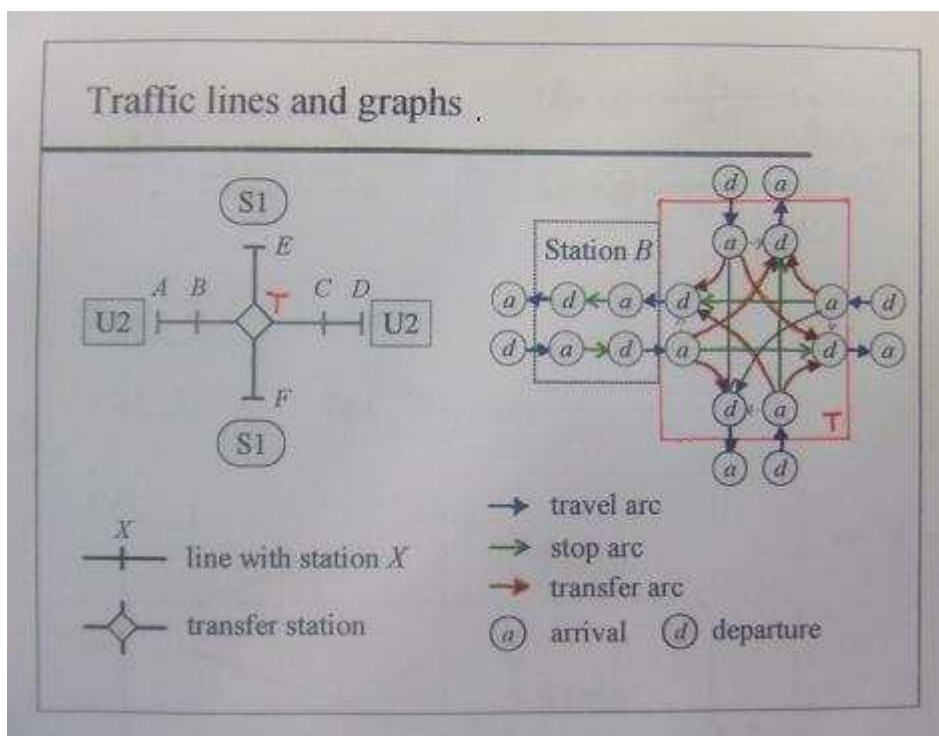


ABBILDUNG 76. Grundmodell

Als erstes wollen wir betrachten, wie man aus einem allgemeinen Liniennetz L einen Graphen G konstruieren kann, auf den wir dann das PESP anwenden können. Um G zu erhalten müssen wir L etwas erweitern. Verfolgen wir zur Verdeutlichung die Linie U2, die von Station A zur Station D fährt. Die U-Bahn fährt in A ab und kommt in B an. Um diesen Prozess zu modellieren, müssen wir also einen Abfahrknoten d_A , wie departure, für die Station A einführen. Weiter erhalten wir einen Ankunfts-knoten a_B , wie arrival, in der Station B. Die beiden Knoten sind durch eine gerichtete Fahrkante (d_A, a_B) verbunden. In der Station B hält der Zug, bis er weiterfährt. Wir erhalten also einen Knoten d_B , der den Zeitpunkt des Verlassen der Station darstellt. Zwischen a_B und d_B haben wir eine Haltekante (a_B, d_B) . Als nächstes kommt der Zug in der Umsteigestation T an. Wir erhalten also wieder einen Ankunfts-knoten a_T und eine Fahrkante (d_B, a_T) . Dort wartet der Zug wieder bis er zu C weiterfährt. Dies entspricht also wieder einem Abfahrknoten d_T und

einer Haltekante (a_T, d_T). Verfolgen wir die Linie U2 weiter, betrachten auch noch ihre Rückrichtung und fügen noch die Knoten und Kanten für die Linie S1 hinzu, so erhalten wir alle Knoten, die Fahrkanten und die Haltekanten des Graphen G . Es fehlen nur noch die Umsteigekanten, die im Transferknoten T auftreten können. Personen, die mit der U2 in Richtung D gefahren sind, können in die S1 Richtung E oder in Richtung F umsteigen wollen. Im Allgemeinen gehen wir davon aus, dass Personen, die in der U2 Richtung D in T angekommen sind, nicht in die U2 Richtung A umsteigen. Wir müssen also noch die entsprechenden Kanten in unseren Graphen hinzufügen.

Für die Fahrkanten ergeben sich für ℓ_{ij} und u_{ij} genau die Fahrzeiten, die ein Zug von i nach j braucht. Bei den Haltekanten hängen die Schranken stark vom Verkehrsmittel ab. Bei der DB ist es sinnvoll, dass ein Zug mindestens 2 Minuten auf einem Bahnsteig verbleibt, sich allerdings dort nicht länger als 10 Minuten aufhält. Bei der S-Bahn können die Haltezeiten auch zwischen 0 und 3 Minuten liegen. Die Schranken für die Umsteigekanten hängen von der Politik der jeweiligen Gesellschaft ab. Die untere Schranke ist in der Regel die mindest Übergangszeit zwischen den beiden Bahngängen. Als obere Schranke wird meistens die Takzeit genommen.

Im folgenden wollen wir ein paar Spezialfälle betrachten, die wir ebenfalls modellieren können:

Example 6.6. Endstation: Wir wollen uns die Endbahnhöfe in unserem Liniennetz noch mal genauer anschauen (Abb. 77). An der Endstation braucht der Zugfahrer Zeit, um von einem Ende des Zuges zum anderen zu gelangen. Betrachten wir also die Linie U3: Verfolgen wir wie oben die U3 vom Knoten A zum Knoten C , so erhalten wir wieder die üblichen Knoten, Fahrkanten und Wartekanten. Was jedoch neu hinzu kommt, sind die so genannten Wendekanten. Im Knoten A kommt ein Zug aus Richtung C an und endet hier. Genauso fährt ein Zug in A Richtung C wieder los. Da wir jedes mal den gleichen Zug benutzen können, fügen wir noch eine Wendekante zwischen a_A und d_A ein.

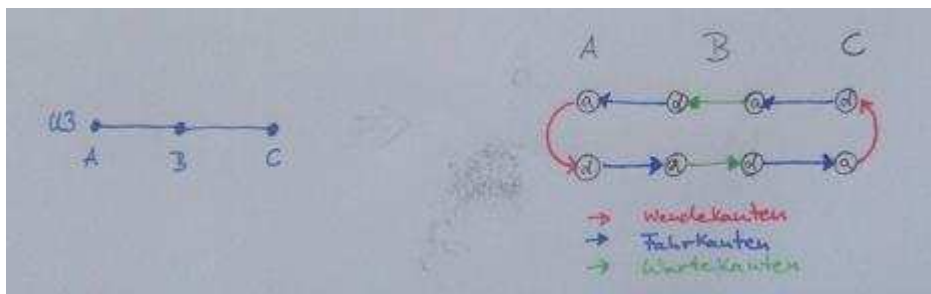


ABBILDUNG 77. Endstation

Eingleisige Strecken: Betrachten wir zwei Bahnhöfe A und B , zwischen denen die Linien L_1 von B nach A und L_2 von A nach B verkehren. Für die Strecke von A nach B brauchen beide Linien 5 Minuten. Allerdings ist nur ein Gleis zwischen den Bahnhöfen vorhanden, d.h. es kann immer nur ein Zug gleichzeitig fahren.

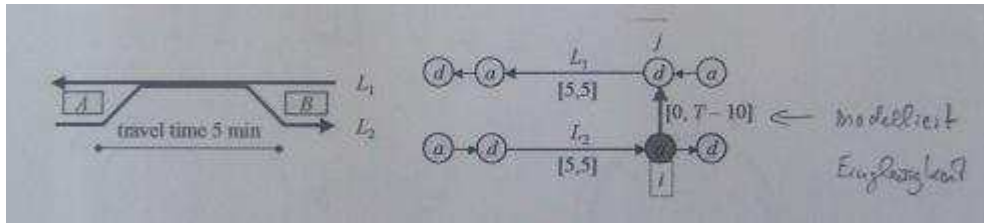


ABBILDUNG 78. Eingleisigkeit.

Im Graphen G könne wir dies modellieren, indem wir beide Linien erstmal getrennt modellieren und dann zwischen dem Knoten d_B der Linie L_1 und a_B der Linie L_2 eine Kante mit den Grenzen $[0, T - 10]$ einfügen.

Das diese Modellierung das gewünschte liefert, sieht man an einem Weg-Zeit-Diagramm (Abb. 79).

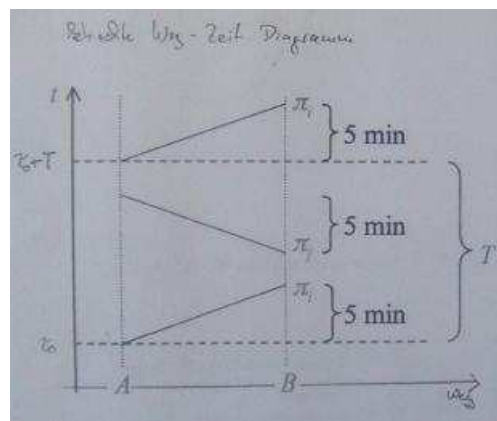


ABBILDUNG 79. Anhand des Weg-Zeit-Diagramms erkennt man, dass das einfügen der Kante das gewünschte erreicht.

Nehmen wir an, ein Wagen der Linie L_2 fährt zum Zeitpunkt τ_0 in A los. Dann kommt er zum Zeitpunkt $\tau_0 + 5 = \pi_i$ im Bahnhof B an. Ein Zug der Linie L_1 kann jetzt frühestens zum Zeitpunkt π_i am Bahnhof B abfahren, muss aber spätestens zum Zeitpunkt $\tau_0 + T - 5$ im Bahnhof B abgefahren sein, da zum Zeitpunkt $\tau_0 + T$ wieder ein Zug der Linie L_2 am Bahnhof A losfahren soll. Es gilt also $\pi_i \leq \pi_j \leq \tau_0 + T - 5$ und mit $\tau_0 = \pi_i - 5$ erhalten wir die Relation $0 \leq \pi_j - \pi_i \leq T - 10$ zwischen den Knoten d_B der Linie L_1 und a_B der Linie L_2 .

Disjunktive Bedingungen: Für den Fahrplan soll $\pi_j - \pi_i \in [\ell_{ij}, u_{ij}]_T$ oder $\pi_j - \pi_i \in [\ell'_{ij}, u'_{ij}]$ erfüllt sein. Statt dessen können wir auch fordern, dass die Bedingungen $\pi_j - \pi_i \in [\ell_{ij}, u'_{ij}]$ und $\pi_j - \pi_i \in [\ell'_{ij}, u_{ij}]$ erfüllt sind. Veranschaulichen kann man das durch die folgende Skizze (Abb. 80).

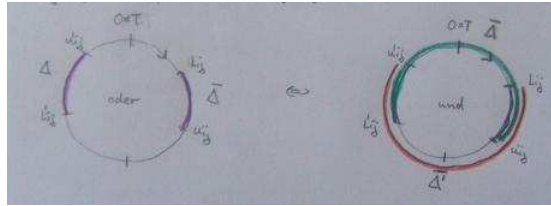


ABBILDUNG 80. Ursprünglich sollten $\pi_j - \pi_i \in [\text{violett}]$ mit einer oder Bedingung erfüllen. Stattdessen kann man auch $\pi_j - \pi_i \in [\text{grün}]$ und $\pi_j - \pi_i \in [\text{rot}]$ fordern.

Anhand der drei Beispiele sieht man schon, dass man mit starke Modellierungsmöglichkeiten mit dem PESP hat. Weiter lassen sich auch die folgenden Fälle als zulässige periodische Potenzialprobleme modellieren:

- Zeitlicher Mindestabstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zügen auf der gleichen Strecke
- Treffen verschiedener Linien an bestimmten Bahnhöfen zur gleichen Zeit zwecks Umsteigen
- Fixieren von Ereignissen z.B. für die Koppelung an andere Verkehrsmittel
- Anzahl der Fahrzeuge, indirekt über die Fahrzeit entlang einer Linie

Bei der Modellierung erhalten wir für jede Kante (i, j) eine Ungleichung für die Knotenvariablen π_i und π_j . Die Schranken der Ungleichungen sind die oberen und unteren Schranken auf den einzelnen Kanten. Genauso kann man aus einem Gegebenen Graphen die entsprechenden Ungleichungen für die Knotenvariablen π_i ablesen.

Bisher haben wir uns nur darum gekümmert, wie wir allgemein einen zulässigen Fahrplan für ein gegebenes Liniennetz modellieren können. Oft soll ein Fahrplan noch eine bestimmte Zielfunktion optimieren. Dazu werden wir uns im folgenden mit linearen Zielfunktionen $\sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \cdot x_{ij}$ mit $x_{ij} = \pi_j - \pi_i$ beschäftigen, wobei w_{ij} Kantengewichte darstellen.

Zu den wichtigsten linearen Zielfunktionen gehören die gewichtet Summe der Umsteigezeiten und die Gesamtfahrzeit entlang von Fahrkanten und Haltekanten. Bei festen Fahrzeiten $x_{ij} \in [t_{ij}, t_{ij}]_T$ entspricht die zweite Zielfunktion der Anzahl der Fahrzeuge. Leider sind beide Zielfunktionen gegenläufig, weswegen die jeweils andere Zielfunktion mit als Nebenbedingung in das zu lösende PESP eingehen kann.

Betrachten wir das PESP als MIP, so erhalten wir

$$(\text{PESP})_{\text{MIP}} \begin{cases} \min \sum_a w_a x_a \\ x_a = \pi_j - \pi_i & \forall a = (i, j) \in E(G) \\ \ell_a \leq x_a + p_a T \leq u_a & \forall a \in E(G) \\ 0 \leq x_a < T & (*) \\ p_a & \in \mathbb{Z} \\ x_a, \pi_i \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bei ganzzahligen ℓ_a, u_a und p_a kann die Gleichung $(*)$ durch

$$0 \leq x_a \leq T - 1$$

ersetzt werden. Im folgenden gehen wir von der Ganzzahligkeit der Werte aus.

Dieses MIP ist selbst bei kleinen Instanzen schwer lösbar. Christian Liebchen hat zwei Instanzen dieser Art timtab1 und timtab2 zur MIPLIB (Sammlung von schweren Programm) beigesteuert. In beiden Instanzen werden 10 ICE/IC Verbindungen mit den 40 wichtigsten Umsteigebeziehungen modelliert. Die Graphen, die

man erhält, haben nach dem Preprocessing noch die Größe von $n = 56$ bzw. $n = 88$, $m = 226$ und $m = 381$.

6.3. Die Komplexität des PESP. Das aperiodische Potentilproblem ist in P . Dies folgt sofort aus Satz 6.2. Da hingegen erhalten wir für das periodische Potenzialproblem:

Theorem 6.7. *Das periodische Potenzialproblem ist NP-vollständig, selbst für festes $T \geq 3$.*

Beweis. (Nachtigall 1996): Der Beweis geht über die Reduktion auf die k -Färbbarkeit von Graphen. Dabei stellt sich bei der k -Färbbarkeit die folgende Frage: Können die Knoten eines gegebenen ungerichteten Graphen G mit k Farben eingefärbt werden, so dass keine Kante zwischen zwei gleich gefärbten Knoten besteht. Für $k \geq 3$ ist das Problem NP-vollständig.

Betrachte eine Instanz von k -Färbbarkeit, also einen ungerichteten Graphen G . Daraus konstruieren wir eine Instanz des PESP wie folgt: Sei D ein Digraph, der aus einer beliebiger Orientierung der Kanten von G entsteht. Weiter weisen wir jeder Kante $a \in A(G)$ die Schranken $\ell_a := 1$ und $u_a := T - 1$, wobei wir $T := k$ setzen. Im folgenden zeigen wir, dass das PESP genau dann lösbar ist, wenn G eine k -Färbung besitzt.

$$\begin{aligned} & \pi \text{ ist ein zulässiges periodisches Potenzial für diese Instanz} \\ \Leftrightarrow & 1 \leq \pi_j - \pi_i + p_a T \leq T - 1 \text{ für alle } a \in A(G) \\ \Leftrightarrow & \pi_i \neq \pi_j \pmod{T} \text{ für alle } a \in A(G) \\ \Leftrightarrow & \pi_i \pmod{T} \text{ definiert eine } k\text{-Färbung von } G. \end{aligned}$$

□

Der Kern der NP-Vollständigkeit ist das Finden der Periodenoffsets p_a . Für gegebene p_a ist das Entscheidungsproblem in P , da

$$\begin{aligned} & \ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_a T \leq u_{ij} \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\ell_{ij} - p_a T}_{\text{feste Zeiten}} \leq \pi_j - \pi_i \leq \underbrace{u_{ij} - p_a T}_{\text{feste Zeiten}} \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Lösen eines aperiodischen Potenzialproblems. Ebenso ist das MIP leicht zu lösen, wenn die p_a bekannt sind.

Betrachten wir nun die Komplexität eines weiteren mit PESP verwandte Problem, das MAX-T-PESP. Im MAX-T-PESP ist ein Digraph G mit unter- und oberen Schranken ℓ_a, u_a pro Kante und eine Taktzeit T gegeben. Gesucht ist ein periodisches Potenzial π , dass

$$\ell_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij} T \leq u_{ij} \quad \forall a \in A' \subset A$$

für ein bzgl. seiner Kardinalität maximales A' erfüllt. Man sucht also nicht unbedingt ein zulässiges Potenzial, aber eines für das die Gleichungen bei möglichst vielen Kanten erfüllt ist.

Theorem 6.8. *Das Problem MAX-T-PESP ist für jedes $T \geq 2$ MAXSNP-vollständig, d.h. es gibt kein Approximationsschema außer $P = NP$.*

Beweis. Durch eine L -Reduktion von MAX-2-COLORING. Beim MAX-2-COLORING stellt sich das Problem so viele Knoten wie möglich mit zwei Farben zu färben, so dass die Färbung für alle gefärbten Knoten zulässig ist. □

Im folgenden Kapitel werden wir Formulierungen untersuchen, über die PESP-Instanzen schneller zu lösen bzw. anzunähern sind. Dabei werden wir Potenzialdifferenzen als eigenständige Kantenvariablen betrachten. Dabei stellt sich dann die

Frage, ob wir nur anhand der Potenzialdifferenz (ohne Potenziale) angeben können, ob diese zu einem zulässigen Potenzial gehören oder nicht.