ANGEWANDTE NETZWERKOPTIMIERUNG

VORLESUNG PROF. MÖHRING, MIT GESCHRIEBEN VON CHRISTINA PUHL

In der Vorlesung werden zwei Themen behandelt:

(1) Routing im Verkehr und Logistik
(2) Scheduling bei Taktfahrplänen und evtl.. allgemein in der Produktion

Teil 1. Verkehr und Flüsse

1. Das Basismodell für statischen Verkehr

1.1. **Grundlagen.** Wir werden als erstes die Rush Hour modellieren. Bei der Rush Hour fahren innerhalb von einer Minute eine feste Anzahl von Autos an einer Straße vorbei. Man kann also die Rush Hour als einen statischen Fluss ansehen. Für die Modellierung verwenden wir das Standardflussmodell der ADM. Das *Straßennetz* definieren wird als Digraph $G = (V, A)$, A wie arcs. Die *Flußrate* auf der Kante a bezeichnen wir dann als x_a bzw. f_a. Diese Graphen werden natürlich groß. Der Graph für Berlin besteht z.B. aus 10000 Konten und 30 000 Kanten. Ganz Deutschland hat ca. 11 Mio. Kanten.

Neben dem Straßennetz sind auch noch gewisse *Start- und Zielorte* gegeben, z.B. Wohngebiete und Arbeitsplätze. Diese bezeichen wir mit (s_k, t_k), $k \in C$, wobei C für commodity steht. Im Allgemeinen betrachten wir nicht nur ein Start- und Zielknotenpaar. Von einem Start- zu einen Zielknoten wird immer eine bestimmter *demand* d_k fließen. Zur "realistischen" Modellierung werden Knoten als kleine Stadtteile angesehen. Als weitere Vereinfachung betrachten wir ein stetiges Modell, d.h. der Fluss zwischen s_k und t_k kann sich beliebig aufteilen. Zwischen diesen verschiedenen Knotenpaaren (s_k, t_k) besteht Interaktion durch congestion (Stau). Genauer bedeutet das, dass der Fluss x_a auf der Kante a flussabhängige *Fahrzeit* $\tau_a(x_a)$ (latency, Latenz) für die Durchfahrt dieser Kante verursacht (Abb. 1)

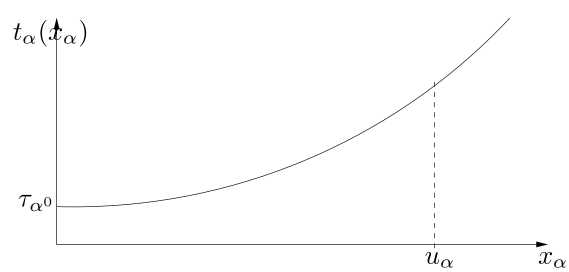

Abbildung 1. Latenzfunktionen geben die Fahrzeit in Abhängigkeit des Verkehrsaufkommens an.

Diese Fahrzeitfunktionen sind meist stetig und (streng) monoton steigend. Von Ingenieuren entwickelte Fahrzeitfunktionen sind z.B. die des *Bureau of Public Roads*, definiert als

$$\tau_a(x_a) = \tau_a^0(1 + \alpha\frac{x_a}{u_a})^\beta),$$

wobei τ_a^0 die free flow travel time (z.B. bei Nacht), u_α die practical capacity und α und β zwei Konstanten darstellen. Typische Werte für die Konstanten sind $\alpha = 0.15$

und $\beta = 4$. Häufig werden Fahrzeiten auch als Polynom modelliert, meistens vom Grad 4.

Ein Fluss kann als ein *Kantenfluss* $x^A = \left(x_1^A, ..., x_m^A\right)^\top$ angegeben werden, wobei x_i^A den Fluss auf Kante i bezeichnet. Genauso kann man einen Fluss als *Pfadfluss* $x^p = \left(x_1^p, ..., x_q^p\right)^\top$ mit $p+q \leq m$ nach dem Dekompositionssatz von Flüssen darstellen, wobei x_i^p die Flussmenge auf Weg i angibt. Bei einer pfadbasierten Optimierung können allerdings exponentiell viele Variablen auftreten. Im Verkehr wollen wir nur Wege bzw. Routen finden. Wir werden also Flüsse meist als Pfadflüsse berechnen und erzeugen. Eine Pfaddekomposition hat also keine Kreise. Kreise tragen im besonderen nichts zur Flussstärke bei. Formaler definieren wir $\mathcal{P}_k$ als die Menge der (s_k, t_k)- Pfade. Außerdem können wir o.B.d.A. verlangen, dass die Mengen $\mathcal{P}_k$ paarweise disjunkt sind. Die Vereinigung der $\mathcal{P}_k$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}$. Ein Pfadfluss x heißt *zulässig*, wenn $\sum_{p\in\mathcal{P}_k} x_p = d_k$ für alle $k \in C$ und $x_p \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_k$ gilt.

Die *Kosten* eines zulässigen *Pfadflusses* $C(x)$ ist die Gesamtzeit des Routens aller demands, auch als *Netzbelastung* bezeichnet. Es ergibt sich also

$$C(x) := \sum_{p\in\mathcal{P}} x_p \tau_p(x_p),$$

mit $\tau_p(x) := \sum_{a\in p} \tau_a(x_a)$, die Fahrzeit entlang Pfad p. Die Definition ist Pfad basiert. Um die Fahrzeit formulieren zu können brauchen wir den Kantenfluss. Dabei erhalten wir aus einem Pfadfluss x den Fluss auf einer Kante a durch

$$x_a = \sum_{a\in p, p\in\mathcal{P}} x_p.$$

Die Netzwerkbelastung können wir natürlich auch Kanten basiert ausdrücken mit

$$C(x) = \sum_{a\in A} x_a \tau_a(x_a).$$

Note 1.1. Die Netzwerkbelastung ist eine spezielle Art der Kostenberechnung. Wir können Kosten auch bzgl. allgemeiner Kantenkosten $c_a(x_a)$ genauso ermitteln:

$$C(x) := \sum_{p\in\mathcal{P}} x_p \cdot c_p(x)$$

mit $c_p(x) = \sum_{a\in p} c_a(x_a)$. In unserem Fall ist $c_a(x_a) = x_a \cdot \tau_a(x_a)$. Wir setzten generell voraus, dass $x_a \cdot \tau_a(x_a)$ konvex ist.

1.2. **Das Systemoptimum.** Das Problem SO wird definiert als $\min C(x)$ unter $\sum_{p\in\mathcal{P}_k} = d_k$ für alle $k \in C$ und $x_p \geq 0$. Generell wird ein sytemoptimaler Fluss (SO) mit f^* bezeichnet. Das SO Problem hat exponentiell viele Variablen, aber die Kantenformulierung hat nur $m = |A|$ viele Variablen. Außerdem kann man aus jedem zulässigen Kantenfluss mit Kosten $C(x)$ einen Pfadfluss mit gleichen Kosten konstruieren. Wir können uns also in den Algorithmen auf die Kantenformulierungen zurückziehen und daraus später eine Pfad basierte Lösung entwickeln. Da die Kostenfunktionen $c_a(x_a)$ konvex sind, erhalten wir eine konvexe Zielfunktion mit linearen Nebenbedingungen. Dieses Problem ist dann allgemein mit der Ellipsoid Methode in polynomieller Zeit (bis auf additives ϵ) lösbar.

Betrachten wir nun das SO Problem aus nichtlinearer Sicht. Wir haben ein konvexes seperables (separabel nach Variablen $C(x) = \sum_{p\in\mathcal{P}} x_p \cdot c_p(x)$) nichtlineares Optimierungsproblem mit linearen Nebenbedinungen. Da die Zielfunktion konvex ist, ist jedes lokale Optimum auch ein globales Optimum. Eine der wichtigsten Optimalitätsbedingung der nichtlinearen Optimierung (first order, Kuhn Tucker) ergibt:

Lemma 1.2. *[Optimalitätsbedingungen für So] Seien die Kostenfunktionen $c_a(x_a)$ konvex und differenzierbar. Dann ist der Fluss f^* genau dann optimal in SO, wenn* *für alle Pfade* $p, q \in \mathcal{P}_k$ *und für alle* k *die Ungleichung* $c'_p(f^*) \le c'_q(f^*)$ *mit* $f^*_p > 0$ *erfüllt ist. Dabei sind die* marginalen Kosten *definiert als*

$$c'_p(f^*) := \sum_{a \in \mathcal{P}} \frac{d}{dx_a} c_a(x_a) =: \sum_{a \in A} c'(x_a).$$

Speziell für $c_a(x_a) = x_a \tau_a(x_a)$ *ergibt sich* $c'_a(x_a) = \tau_a(x_a) + x_a \tau'(x_a)$.

Note 1.3. Die Beweisidee ist folgende: f^* ist genau dann lokal optimal, wenn die Verlagerung von Fluss von einem Pfad auf einen anderen die Kosten erhöht. Das ist gleichbedeutend damit, dass die marginalen Kosten für Verringerung von Fluss entlang eines (s_k, t_k)- Weges kleiner gleich den marginalen Kosten für die Vergrößerung von Fluss entlang eines anderen (s_k, t_k)- Weges ist. Dies ist äquivalent zu $c'_p(f^*) \le c'_q(f^*)$.

Eine Interpretation im Fall $c_a(x) = x_a \tau_a(x_a)$ mit $c'(x_a) = \tau_a(x_a) + x_a \tau'_a(x_a)$ wäre, $\tau_a(x_a)$ als Fahrzeit und $x_a \tau'_a(x_a)$ als externe Kosten, die ein Nutzer für andere Nutzer durch das Benutzen der Kante a als Kosten verursacht zu betrachten.

Das Systemoptimum SO kann zu schlechten Individuallösungen führen.

Example 1.4 (Pigou 1920)**.** Wir betrachten ein einfaches Netzwerk mit einem Start- und eine Zielknoten s und t und zwei Kanten, die die beiden Knoten verbindet. Es soll eine Verkehrseinheit von s nach t verschickt werden. Die Fahrzeit auf der Kante a beträgt $\tau_a(x_a) = x_a^\beta$ und auf der Kante b beträgt sie $\tau_b(x_b) = (\beta+1)(1-\epsilon)$, ist also konstant (Abb. 1.2).

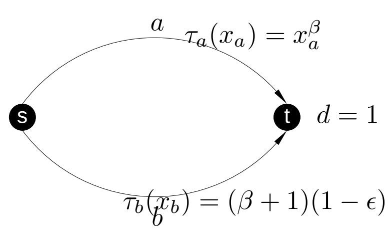

ABBILDUNG 2. Beispiel von Pigou

Die Optimalitätsbedingung für das SO bzgl. des Flusses $\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix}$ mit $x_a + x_b = 1$ sind

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_a} x_a^{\beta+1} &= \frac{d}{dx_b} x_b(\beta+1)(1-\epsilon) \\ \Leftrightarrow\ (\beta+1)x_a^\beta &= (\beta+1)(1-\epsilon). \end{aligned}$$

Wir erhalten also $x_a^\beta = 1-\epsilon$ und damit $x_a = \sqrt[\beta]{1-\epsilon} < 1$, also ist $x_b > 0$. Die Fahrzeit über die Kante a beträgt dann $\tau_a(x_a) = 1-\epsilon < 1$ und über die Kante b erhalten wir eine Fahrzeit von $\tau_b(x_b) = (\beta+1)(1-\epsilon) \to \infty$ für $\beta \to \infty$. Da $x_b > 0$ werden Einige für das Allgemeinwohl "geopfert". Daraus ergibt sich, dass der individuelle Nutzer eines Verkehrsnetzes nach anderen Regeln als denen des Systemopitmums fährt.

1.3. **Das Nashgleichgewicht (User Equilibrium).** Wir gehen von der Annahme aus, dass die Nutzer des Verkehrsnetzwerks eigennützig handeln und für sich den schnellsten Weg suchen. Dabei haben sie vollständige Informationen und kennen die Fahrwege der anderen Nutzer. Ein zulässiger Fluss ist im *Wardrop-Equilibrium* (Wardrop 52), wenn $\tau_p(f) \le \tau_q(f)$ für alle $k \in C$ und für alle $p, q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_p > 0$ gilt. Betrachtet man also zwei Pfade p, q, über die ein Fluss im Wardrop- Equilibrium fließt, so weiß man, dass $\tau_p(f) = \tau_q(f)$ gilt.

1951 führte Nash allgemeine Gleichgewichte für nicht kooperative Spiele ein. Die Verkehrssituation kann man als ein solches interpretieren. Ein zulässiger Fluss f ist im *Nash-Gleichgewicht* [*User Equilibrium* (UE)], wenn sich kein Nutzer durch Wahl eines anderen Pfades verbessern kann, falls alles andere gleich bleibt. Mathematisch formuliert bedeutet dies: $\forall k \in C$ und $\forall q, r \in \mathcal{P}_k$ mit $f_q > 0$ und für alle $0 \leq \epsilon \leq f_q$ gilt, der Fluss f^ϵ definiert durch

$$f_p^\epsilon := \begin{cases} f_q - \epsilon & \text{für } p = q \\ f_r + \epsilon & \text{für } p = r \\ f_p & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt $\tau_q(f) \leq \tau_r(f^\epsilon)$.

Lemma 1.5. *[UE = Wardrop Equilibrium] Sei $\tau_a(x_a)$ stetig und schwach monoton für alle $a \in A$ und sei f ein zulässigen Fluss f. Dann ist f genau dann im UE ist, wenn f im Wardrop Equilibrium ist.*

Note 1.6. Die Beweisidee ergibt aus dem Grenzübergang von $\epsilon \to 0$.

Für die Richtigkeit der Aussage kann keine Voraussetzung kann weggelassen werden.

Example 1.7. Die Fahrzeitfunktion auf der Kante b ist nicht stetig. Es stellt sich zwar ein Nash Equilibrium bei $\binom{1}{1}$ ein, ein Wardrop Equilibirum existiert in diesem Fall nicht (Abb. 3).

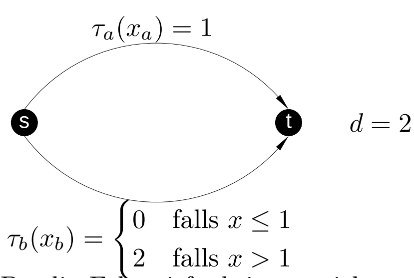

ABBILDUNG 3. Da die Fahrzeitfunktionen nicht stetig sind, existiert in diesem Fall auch kein Wardrop Equilibrium.

Im zweiten Fall ist die Fahrzeitfunktion mit $\tau_b = 1.5 - x$ nicht monoton steigend. Damit ergibt sich ein Wardroph Equilibrium bei $\binom{0.5}{0.5}$, das allerdings kein Nash-Gleichgewicht darstellt (Abb. 4).

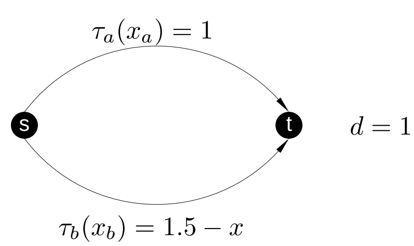

ABBILDUNG 4. Die Funktion τ_b ist nicht monoton steigend. Ein Wardroph Equilibirum stellt sich dann bei $\binom{0.5}{0.5}$ ein.

Wir betrachten nun ein Beispiel, dass die Nachteile des UE deutlich macht.

Example 1.8. [Braess Paradox] Zwei Nachteile des UE sind, dass es nicht optimal im Sinne des SO ist und keine Monotonie (im Sinne von mehr Straßen entspricht geringerer Netzbelastung) gilt.

Wir betrachten das folgende Netzwerk (Abb. 5) :

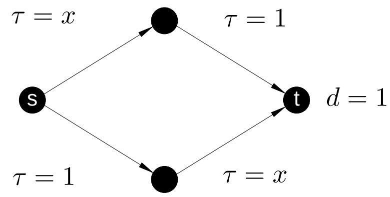

Abbildung 5. Das Braess Paradoxon betrachtet zwei Wege die von einer Quelle zu einem Ziel führen.

Im UE werden $\frac{1}{2}$ Flusseinheiten oben und $\frac{1}{2}$ Flusseinheiten unten entlang geschickt. Als Fahrzeit erhalten wir $C(\text{UE}) = \frac{3}{2}$ für beide Pfade.

Wird nun eine Schnellstraße gebaut, stellt sich das UE ein, wenn alle Autos die Schnellstraße benutzen. Man erhält also eine Fahrzeit von $C(\text{UE}) = 2$ (Abb. 6).

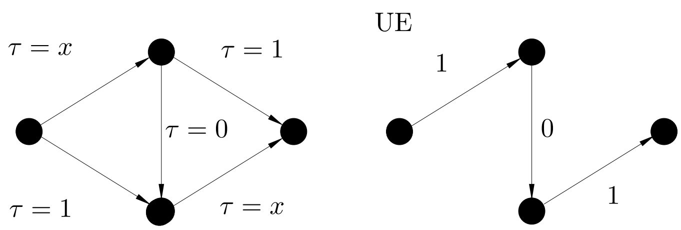

Abbildung 6. rechts: eine Schnellstraße wird gebaut. links: Alle Nutzer wählen jetzt den gleichen Weg.

Um solche Paradoxen zu vermeiden wird beim Bau einer neuen Straße häufig auch die Verkehrsleitung der alten Straßen verändert. Dazu werden z.B. Einbahnstraßen eingebaut oder Geschwindigkeitsbegrenzungen eingeführt.

Betrachten wir in diesem Fall das Systemoptimum, dann ändert es sich nicht durch den Bau der Schnellstraße. Das SO benutzt nicht die neue Straße.

Um den Unterschied, wie sich das UE und das SO unterschieden, messen zu können, definieren den *Preis der Anarchie* durch $\frac{C(\text{UE})}{C(\text{SO})}$.

Example 1.9. Für das Beispiel des Braess Paradoxon erhalten wir einen Preis der Anarchie von $\frac{4}{3}$.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel mit dem wir zeigen, dass der Preis der Anarchie beliebig groß werden kann.

Example 1.10. Im Beispiel von Pijou hatten wir zwei Möglichkeiten betrachtet von einer Quelle zu einer Senke zu kommen. Mit der Fahrzeiten x^β für den oberen und 1 für den unteren Weg stellt sich die Frage, wie sich das UE und das SO einstellen (Abb. 7).

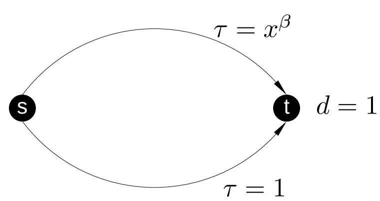

Abbildung 7. Preis der Anarchie kann beliebig groß werden.

Das UE ergibt sich, wenn alle Fahrzeuge den oberen Weg nehmen und wir erhalten $C(UE) = 1$. Betrachten wir nun das SO. Wir hatten festgestellt, dass $1 - \epsilon$

Einheiten oben entlang fahren und ϵ unten. Lassen wir nun β gegen Unendlich gehen, dann erhalten wir als Kosten

$$\begin{aligned} C\begin{pmatrix} 1-\epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} &= (1-\epsilon)(1-\epsilon)^{\beta} + \epsilon \cdot 1 \\ &\approx \epsilon \end{aligned}$$

Somit geht SO gegen ϵ. Betrachten wir nun den Preis der Anarchie so erhalten wir

$$\frac{c(\text{UE})}{c(\text{SO})} \geq \frac{1}{\epsilon} \to \infty \text{ für } \epsilon \to 0.$$

Der Effekt liegt an der Benutzung von steilen Fahrzeitfunktionen (Abb. 8).

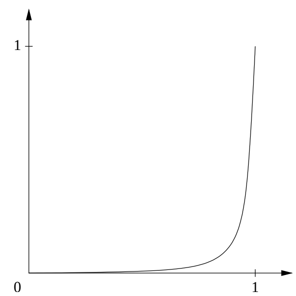

Abbildung 8. Darstellung der Fahrzeitfunktion der oberen Kante: x^{β}

Es erstellt sich also sofort die Frage, wie der Preis der Anarchie für realistische Klassen von Fahrzeitfunktionen (z.B. Bureau of Public Roads) aussieht.

1.4. **Beziehungen zwischen SO und UE.** Die Basisbeziehung zwischen dem SO und dem UE folgt aus Lemma 1.2 und der Definition des UE. Zur Wiederholung: Lemma 1.2 und die Definition des UE:

$$\begin{aligned} f^*\text{ist SO} \quad &\Leftrightarrow \quad c_p'(f^*) \leq c_q'(f^*)\ \forall k, \forall p, q \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f_p > 0 \\ f \text{ ist UE} \quad &\Leftrightarrow \quad \tau_p(f) \leq \tau_q(f)\ \forall k, \forall p, q \in \mathcal{P}_k \text{ mit } f_p > 0 \end{aligned}$$

Proposition 1.11. *[Beckmann, McGueire, Winston '56] Sei f^* ein zulässiger Fluss für eine Instanz mit konvexen, differenzierbaren, schwach monoton steigenden Fahrzeitfunktionen $\tau_a(x_a)$. Dann gilt: f^* ist genau dann ein SO bzgl. $\tau_a(x_a)$, wenn f^* ein UE bzgl. $c_a'(x_a) = \tau_a(x_a) + x_a\tau'(x_a)$ ist.*

Als Interpretationen der Proposition bietet sich folgendes an:

(1) Ein SO ist ein UE bzgl. marginalen Kosten $c_a'(x_a)$ als Fahrzeitfunktion.
(2) Das UE (bzgl. $\tau_a(x_a)$) ist ein SO bzgl. der Fahrzeitfunktionen $\hat{\tau}_a(x_a) := \frac{1}{x_a}\int_0^{x_a} \tau_a(t)dt$, denn $\frac{d}{dx_a}(x_a\hat{\tau}_a(x_a)) = \frac{d}{dx_a}\int_0^{x_a}\tau_a(t)dt = \tau_a(x_a)$. Anders ausgedrückt: das UE ist das SO der Kostenfunktion $C(x) = \sum_{a\in A} x_a\hat{\tau}(x_a) = \sum_{a\in A}\int_0^{x_a}\tau_a(t)dt$ unter $\sum_{p\in\mathcal{P}_k} x_p = d_k$ für alle k und $x_p \geq 0$. Dieser Übergang von der Betrachtung des UE anstatt des SO wird auch *Beckmann Transformation* genannt.

Conclusion 1.12. Aus den bisherigen Betrachtungen können wir folgende Schlüsse ziehen:

(1) Unter der Voraussetzung von Proposition 1.11 ist das UE eindeutig als Kantenfluss bestimmt. Das ändert sich wenn wir Kapazitäten auf den Kanten haben.

(2) Für alle Pfade $p, q \in \mathcal{P}_k$ mit f_p, $f_q > 0$ gilt, dass $\tau_p(f) = \tau_q(f) =: L_k(f)$, wobei f das UE ist. D.h. alle Fluss führenden (s_k, t_k) Wege haben dieselbe Fahrzeit.
(3) Das UE und das SO können mit den selben Methoden berechnet werden.

Beweis. zu (1): das UE ist ein SO bzgl. $\hat{\tau}_a(x_a) := \frac{1}{x_a}\int_0^{x_a} \tau_a(t)dt$. Der Integralteil ist streng monoton, differenzierbar und konvex. Damit ist das UE ein Optimum einer konvexen, separablen streng monotonen Funktion. Also ist es eindeutig.

zu (2): folgt aus der Bedingung des Wardrop Equilibrium. □

1.5. **Folgerung ("Mautgebühren").** Proposition 1.11 ist die Basis für "Mautgebühren" (zumindest aus mathematischer Sicht). Wenn man ein SO bzgl. $\tau_a(x_a)$ erzielen will, so muss man durch Maut die "Kosten" pro Kante zu $\tau_a(x_a)+x_a\cdot\tau'(x_a)$ verändern. Dabei kann $\tau_a(x_a)$ als Fahrzeit für den User und $x_a\tau'(x_a)$ als veränderliche Maut angesehen werden.

Für die weiteren Überlegungen ist folgende Technik nützlich: Sei f ein zulässiger, fester Fluss. Dieser verursacht also Fahrzeiten $\tau_a(f_a)$ auf einer Kante. Die *Kosten eines zulässigen Flusses x relativ zu f* sind $C^f(x) := \sum_{a\in A} x_a \cdot \tau_a(f_a)$. Dabei ist die Flussmenge abhängig von x und die Fahrzeit abhängig von f.

Proposition 1.13. *[Smith 79, Dafermos 80] Sei f zulässig für eine Instanz mit stetigen, schwach monoton steigenden Fahrzeitfunktionen τ_a. Dann ist f genau dann ein UE, wenn $C^f(f) \le C^f(x)$ für alle zulässigen Flüsse x gilt.*

Das bedeutet also, dass das UE f die relativen Kosten $C^f(x)$ minimiert.

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei f ein UE. Dann ist $\tau_p(f) = L_k(f)$ für alle $p \in \mathcal{P}_k$ für alle k mit $f_p > 0$ [$L_k(f)$ ist die feste Fahrzeit für eine Commodity k]. Für alle Pfade $q \in \mathcal{P}_k$ mit $f_q = 0$ gilt $\tau_q(f) \ge L_k(f)$. Die Kosten eines zulässigen Flusses x relativ zu f ergeben sich dann mit

$$\begin{aligned} C^f(f) &= C(f) \\ &= \sum_k \sum_{p\in\mathcal{P}_k, f_p>0} L_k(f)\cdot f_p \\ &\le \sum_k \sum_{q\in\mathcal{P}_k, x_q>0} \tau_q(f) x_k \\ &= C^f(x) \end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung durch die Beziehung oben erhalten.

" $\Leftarrow$ " Nach Voraussetzung gilt $C^f(f) \le C^f(x)$ für alle zulässigen Flüsse x. Wir nehmen an, dass f kein UE ist. Dann gibt es ein k und zwei Wege $q, r \in \mathcal{P}_k$ mit $\tau_q(f) > \tau_r(f)$ und $f_q > 0$. Sei x der Fluss, der aus f entsteht, indem man allen Fluss von q auf den Pfad r verlagert. Dann gilt

$$C^f(f) - C^f(x) = \tau_q(f)f_q - \tau_r(f)f_q = (\tau_q(f) - \tau_r(f))f_q > 0.$$

Daraus folgt $C^f(f) > C^f(x)$. Damit erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung. □

Theorem 1.14. *[Roughgarden, Tardos 02] Für affin lineare Fahrzeitfunktionen $\tau_a(x_a) = \alpha_a x_a + \beta_a$ gilt*

$$\frac{C(UE)}{C(SO\ )} \le \frac{4}{3}.$$

Ist $\beta_a = 0$ für alle a, so erhalten wir einen Preis der Anarchie von 1.

Schulz,Stier '04. 1. Teil: Sei f ein UE Fluss und x ein beliebiger zulässiger Fluss. Dann erhalten wir mit Proposition. 1.13

$$\begin{aligned} C(f) &= C^f(f) \\ &\leq C^f(x) \\ &= \sum_{\substack{a\in A \\ x_a < f_a}} \tau_a(f_a)x_a + \sum_{\substack{a\in A \\ x_a \geq f_a}} \underbrace{\tau_a(f_a)x_a}_{\leq \tau_a(x_a)x_a \ (*)} \end{aligned}$$

Die Abschätzung $(*)$ gilt wegen der Monotonie von τ_a. Für $\tau_a(f_a)x_a$ können wir folgende Rechnung durchführen:

$$\tau_a(f_a)x_a = \tau_a(x_a)x_a + \underbrace{(\tau_a(f_a) - \tau_a(x_a))x_a}_{=A}$$

Als Bild interpretiert erhalten wir (Abb. 9).

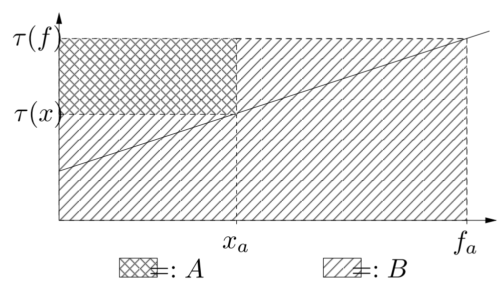

ABBILDUNG 9. Abschätzung des Preises der Anarchie.

Der Quotient $\frac{A}{B}$ wird maximal, wenn $\beta_a = 0$ ist. In diesem Fall gilt $A = \frac{1}{4}\tau_a(f_a) \cdot f_a$ und wir können allgemein die Fläche A abschätzen mit

$$A \leq \frac{1}{4}\tau_a(f_a) \cdot f_a = \frac{1}{4} \cdot B$$

Gehen wir jetzt zu unserer ursprünglichen Rechnung zurück, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} C(f) &\leq \sum_{a\in A} \tau_a(x_a)x_a + \sum_{a\in A} \frac{1}{4}\tau_a(f_a)f_a \\ &\leq C(x) + \frac{1}{4}C(f). \end{aligned}$$

Damit erhält man $\frac{3}{4}C(f) \leq C(x)$ für alle zulässigen Flüsse x und insbesondere für das SO. Es gilt also $C(\text{UE}) \leq \frac{4}{3}C(\text{SO})$. Das Beispiel von Braess 1.8 zeigt, dass die Schranke scharf ist.

2. Teil: Sei $\tau_a(x_a) = \alpha_a x_a$, d.h. $\beta_a = 0$ für alle a. Wir werden nun zeigen: dass das UE gleich dem SO ist.

Der Fluss f^* ist genau dann ein SO, wenn $c'_p(f^*) \leq c'_q(f^*)$ für alle k und für alle $p, q \in \mathcal{P}_k$ mit $f^*_p > 0$ gilt. Und f ist genau dann ein UE, wenn $\tau_p(f) \leq \tau_q(f)$ für alle k und für alle $p, q \in \mathcal{P}_k$ mit $f^*_p > 0$ gilt. Betrachten wir jetzt unsere spezielle Fahrzeitfunktion. Dann gilt

$$c'_p(f) = \sum_{a\in p} \frac{d}{dx_a}(x_a(\alpha_a x_a)) = \sum_{a\in p} 2\alpha_a x_a$$

und $\tau_p(f) = \sum_{a\in p} \alpha_a x_a$. Die Bedingungen unterscheiden sich nur um den Faktor 2 auf beiden Seiten, d.h. der Fluss f im UE ist auch im SO und somit gilt $C(\text{UE}) = C(f) = C(\text{SO})$. $\square$

Für die Verallgemeinerung auf beliebige Fahrzeitfunktionen τ_a betrachten wir noch mal den ersten Teil des Beweise: Sei f ein UE Fluss und x ein beliebiger zulässiger Fluss. Dann erhalten wir mit Proposition. 1.13 wieder

$$C(f) \quad \leq \quad \sum_{\substack{a\in A \\ x_a<f_a}} \tau_a(f_a)x_a + \sum_{\substack{a\in A \\ x_a\geq f_a}} \underbrace{\tau_a(f_a)x_a}_{\leq\tau_a(x_a)x_a\ (*)}$$

Die Abschätzung $(*)$ gilt wegen der Monotonie von τ_a. Für $\tau_a(f_a)x_a$ führen wir wieder die folgende Rechnung durch:

$$\tau_a(f_a)x_a \quad = \quad \tau_a(x_a)x_a + \underbrace{(\tau_a(f_a) - \tau_a(x_a))x_a}_{=A_a}$$

Bis hier her ist alles gleich geblieben. Als Bild interpretiert erhalten wir jetzt jedoch:

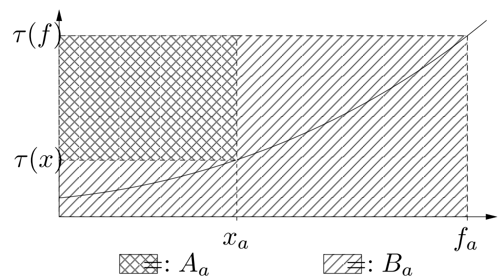

Abbildung 10. Abschätzung für den Preis der Anarchie bei allgemeinen Fahrzeitfunktionen.

Für die Abschätzung der Fläche A_a erhalten wir als:

$$A_a \quad \leq \quad \frac{\max A_a}{B_a} B_a$$

Betrachten wir nun das Maximum aller Abschätzungen $\frac{\max A_a}{B_a}$ über alle Kanten a und definieren dieses als $\frac{\max A}{B}$, dann gilt

$$C(\mathrm{UE}) \leq C(\mathrm{SO}) + \frac{\max A}{B} C(\mathrm{UE}).$$

Für den Preis der Anarchie gilt dann für allgemeine Fahrzeitfunktionen:

$$\frac{C(\mathrm{UE})}{C(\mathrm{SO})} \leq \frac{1}{(1 - \frac{\max A}{B})}.$$

Für bestimmte Funktionenfamilien, wie lineare Funktionen, kann der Quotient $\frac{\max A}{B}$ abgeschätzt werden. Dabei erhält man für Polynome vom Grad n mit positiven Koeffizienten die folgende Werte für den Preis der Anarchie:

n	1	2	3	4
Preis der Anarchie $\frac{1}{(1-\frac{\max A}{B})}$	$\frac{4}{3}$	~1,63	~1,9	~2,15

Theorem 1.15. *[Roughgarden, Tardos 2002] Im allgemeinen gilt*

$$C(UE) \leq C(SO, \textit{ bei doppelter Nachfrage}).$$

Also ist die Netzbelastung im UE beschränkt durch die optimale Netzbelastung für den doppelten Bedarf. Man kann allerdings auch sagen, dass man für die Kosten des UE bis zum doppelten Bedarf optimal routen kann. 2005 haben Correa, Schulz und Stier diese Grenze verbessert.

Theorem 1.16. *[Correa, Schulz, Stier 2005] Es gilt*

$$C(UE) \leq C(SO, \textit{ für die } (1+\beta) \textit{ -fache Nachfrage}),$$

mit $\beta = \frac{\max A}{B}$.

Da $\beta \leq 1$ wird der Satz 1.15 impliziert. Allerdings ist Satz 1.16 im Einzelfall deutlich schärfer. Z.B. erhalten wir bei affin linearen Fahrzeitfunktionen ein β von $\frac{1}{4}$, und somit die Abschätzung $C(\text{UE}) \leq C(\text{SO}$, bei $\frac{5}{4}$ -facher Nachfrage).

Beweis. Sei der Fluss f ein UE bei einem demand d und x das SO für den $(1+\beta)-$fachen demand. Betrachte den Fluss y mit $y_a = \frac{1}{1+\beta} x_a$. Der Fluss y ist zulässig bzgl. des demand d. Nach Prop. 1.13 und einsetzten der Definitionen gilt $C(f) \leq C^f(y) = \sum_{a \in A,} \tau_a(f) y_a = \frac{1}{1+\beta} C^f(x)$. Damit und mit der Beweisidee von Satz 1.14 ergibt sich

$$\begin{aligned} (1+\beta)C(f) &\leq C^f(x) \\ &= \sum_{a \in A} \tau_a(f) x_a \\ &\leq C(x) + \beta \cdot C(f). \end{aligned}$$

Also gilt

$$C(f) \leq C(x).$$

□