Technische Universität Berlin Sommersemester 2010
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 29. Juni 2010

Kontrolltheorie

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 7.7.2010

Aufgabe 20 (Hamiltonische Matrizen)

Sei $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ und es bezeichne $J := J_{2n}$ die Matrix

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie: Folgende Aussagen sind äquivalent.

i) $\mathcal{H}$ ist Hamiltonisch, d.h. es gibt $F, G, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $G = G^T$ und $H = H^T$, so dass

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & -F^T \end{bmatrix}.$$

ii) Es gilt $\mathcal{H}^T J + J\mathcal{H} = 0$.

iii) $J\mathcal{H}$ ist symmetrisch.

iv) $\mathcal{H}$ ist schief-adjungiert bzgl. des inneren Produktes

$$\langle x, y\rangle_J := y^T Jx, \qquad x, y \in \mathbb{R}^{2n},$$

d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt:

$$\langle \mathcal{H}x, y\rangle_J = -\langle x, \mathcal{H}y\rangle_J$$

Aufgabe 21 (Hamiltonische und symplektische Matrizen)

Es sei $\mathcal{H}_{2n}$ die Menge der Hamiltonischen Matrizen, sowie $\mathcal{S}_{2n}$ die Menge der symplektischen Matrizen. Eine Matrix S heißt *symplektisch*, falls S orthogonal bzgl. des inneren Produkts $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ ist, d.h., falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt:

$$\langle Sx, Sy\rangle_J = \langle x, y\rangle_J$$

Zeigen Sie:

i) S ist genau dann symplektisch, falls $S^T JS = J$.

ii) $\mathcal{S}_{2n}$ ist eine Gruppe.

iii) Für alle $S \in \mathcal{S}_{2n}, H \in \mathcal{H}_{2n}$ gilt $S^{-1}HS \in \mathcal{H}_{2n}$.

Aufgabe 22 (Hamiltonische und symplektische Matrizen II)

Es sei $\mathcal{H}_{2n}$ die Menge der Hamiltonischen Matrizen, sowie $\mathcal{S}_{2n}$ die Menge der symplektischen Matrizen. Ferner sei

$$[H_1, H_2] := H_1 H_2 - H_2 H_1,$$

für alle $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{2n}$. Zeigen Sie:

i) $[H_1, H_2] \in \mathcal{H}_{2n}$ für alle $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{2n}$.

ii) $[H, H] = 0$ für alle $H \in \mathcal{H}_{2n}$.

iii) $[H_1 + H_2, H_3] = [H_1, H_3] + [H_2, H_3]$ für alle $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{H}_{2n}$.

iv) $[[H_1, H_2], H_3] + [[H_2, H_3], H_1] + [[H_3, H_1], H_2] = 0$ für alle $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{H}_{2n}$. (Jacobi-Identität)

v) Für jedes $H \in \mathcal{H}_{2n}$ gilt

$$\frac{d}{dt}\Big(\langle (I + tH)x, (I + tH)y \rangle_J = \langle x, y \rangle_J\Big)\Big|_{t=0} \qquad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^{2n}$$

(Hintergrund: i)-iv) besagen, dass $\mathcal{H}_{2n}$ zusammen mit dem Produkt $[\cdot, \cdot]$ eine Lie-Algebra ist. v) besagt, dass $\mathcal{H}_{2n}$ die zu der Lie-Gruppe $\mathcal{S}_{2n}$ gehörige Lie-Algebra ist. Lie-Gruppen sind Gruppen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur. Die dazu gehörige Lie-Algebra ist isomorph zum Tangentialraum am neutralen Element der Lie-Gruppe.)