Technische Universität Berlin Sommersemester 2010
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 8. Juni 2010

Kontrolltheorie

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 16.6.2010

Aufgabe 17 (Ackermann-Formel)

Sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times 1}$ ein steuerbares Single-Input-System mit Regelungsnormalform

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ferner sei $\mathcal{L} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ sei abgeschlossen unter komplexer Konjugation, sowie

$$\psi(x) := (x - \mu_1) \cdots (x - \mu_n).$$

Zeigen Sie:

a) Die Matrix $T^{-1}\mathcal{K}(A, B)^{-1}$ hat die Eigenschaft $e_1^T T^{-1}\mathcal{K}(A, B)^{-1} = e_n^T$. Hierbei ist e_1 der erste Einheitsvektor und e_n der n-te Einheitsvektor.

b) Es gilt:

$$e_1^T (T^{-1}AT)^k = \begin{cases} e_{k+1}^T & \text{für } k = 0, \dots, n-1, \\ [-\alpha_0, \dots, -\alpha_{n-1}] & \text{für } k = n. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet e_{k+1} den $k + 1$sten Einheitsvektor.

c) Seien $\beta_0, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$, so dass $\psi(x) = x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$. Dann gilt

$$e_1^T \psi(T^{-1}AT) = [\beta_0 - \alpha_0, \dots, \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}].$$

d) Sei

$$F := -e_n^T \mathcal{K}(A, B)^{-1}\psi(A).$$

Dann löst F das Polvorgabe-Problem für (A, B) und $\mathcal{L}$, d.h. $\sigma(A + BF) = \mathcal{L}$. (Hinweis: Betrachten Sie die Regelungsnormalform des Systems und benutzen Sie die Eindeutigkeit des Polvorgabe-Problems, sowie a)-c).)

Aufgabe 18 (Eigenwerte und Produkte von Matrizen)

Seien $C \in \mathbb{C}^{m,k}$ und $D \in \mathbb{C}^{k,m}$. Zeigen Sie:

$$\sigma(CD) \setminus \{0\} = \sigma(DC) \setminus \{0\},$$

d.h. die von Null verschiedenen Eigenwerte von CD und DC sind gleich.

Aufgabe 19 (Eigenvektoren und Polvorgabe)

Sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times 1}$ ein steuerbares Single-Input-System in Regelungsnormalform

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ferner sei $\mathcal{L} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ abgeschlossen unter komplexer Konjugation und $F = [f_1, \dots, f_n]$ sei so dass $\sigma(A - BF) = \mathcal{L}$. Zeigen Sie:

a) Ist $\lambda \in \mathcal{L} \cap \sigma(A)$, dann ist jeder Eigenvektor von A zum Eigenwert λ auch Eigenvektor von $A - BF$ zum Eigenwert λ. (Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 17d)).

b) $v = [v_1, \dots, v_n]^T \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann ein Eigenvektor von A, wenn gilt:

$$v_k = \lambda^{k-1} v_1 \text{ für } k = 1, \dots, n \text{ und } \sum_{k=1}^{n} (-\alpha_{k-1}) v_k = \lambda v_n.$$

Finden Sie eine analoge Formel für die Eigenvektoren von $A - BF$.

c) Sei $\lambda \in \mathcal{L} \setminus \sigma(A)$ und $x := (A - \lambda I)^{-1} B$. Zeigen Sie: $Fx = 1$.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass xF den Eigenwert 1 hat, wenn $A - BF$ den Eigenwert λ hat und benutzen Sie Aufgabe 18.)

d) Ist $\lambda \in \mathcal{L} \setminus \sigma(A)$, dann ist $(A - \lambda I)^{-1} B$ Eigenvektor von $A - BF$ zum Eigenwert λ.
(Hinweis: Nutzen Sie b) und c).)