Technische Universität Berlin Sommersemester 2010
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 25. Mai 2010

Kontrolltheorie

4. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 2.6.2010

Aufgabe 13 (Kronecker-Produkt)

Seien $Y \in \mathbb{C}^{j\times k}$ und $Z \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dann heißt die $mj \times kn$ Matrix

$$Y \otimes Z = \begin{bmatrix} y_{11}Z & y_{12}Z & \dots & y_{1k}Z \\ y_{21}Z & y_{22}Z & \dots & y_{2k}Z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{j1}Z & y_{j2}Z & \dots & y_{jk}Z \end{bmatrix}$$

das *Kronecker-Produkt* oder *Tensor-Produkt* von Y und Z.

a) Seien W, X, Y, Z Matrizen geeigneter Dimension, so dass die Produkte WX und YZ definiert sind. Zeigen Sie $(W \otimes Y)(X \otimes Z) = (WX) \otimes (YZ)$.

b) Seien S, G nichtsinguläre Matrizen. Zeigen Sie, dass auch $S \otimes G$ nicht-singulär ist und dass
$(S \otimes G)^{-1} = S^{-1} \otimes G^{-1}$.

c) Zeigen Sie, wenn A und B, sowie C und D ähnliche Matrizen sind, dann sind auch $A \otimes C$ und $B \otimes D$ ähnlich.

d) Seien $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und B habe die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_m$. Zeigen Sie

$$\sigma(A \otimes B) = \{\lambda_i\mu_j \,|\, i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, m\}.$$

Aufgabe 14 (Sylvester-Gleichung)

Seien $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $C \in \mathbb{C}^{m\times k}$. A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und B habe die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_m$. Für $X = [x_1\, x_2 \cdots x_k]$ sei $\mathrm{vec}(X) = (x_1^T\, x_2^T \cdots x_k^T)^T \in \mathbb{C}^{mk}$ der Vektor, den man erhält indem man die Spaltenvektoren $x_1, \dots, x_k$ der Reihe nach untereinander anordnet.

a) Zeigen Sie, dass die Sylvester-Gleichung $XA - BX = C$ äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem $Mw = b$ ist, wobei

$$M = A^T \otimes I_m - I_k \otimes B, \quad w = \mathrm{vec}(X), \quad b = \mathrm{vec}(C). \tag{1}$$

(I_p ist die $p \times p$ Einheitsmatrix.)

b) Zeigen Sie, dass die Sylvester-Gleichung $XA - BX = C$ genau dann eine eindeutige Lösung hat, falls A und B keine gemeinsamen Eigenwerte haben.

Aufgabe 15 (Charakterisierung der Beobachtbarkeit)

Zeigen Sie, daß ein LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, $x(0) = x^0$ mit $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}^-$ genau dann beobachtbar ist, wenn die Lyapunovgleichung

$$A^T Q + QA + C^T C = 0$$

eine eindeutige, positiv definite Lösung hat.

Aufgabe 16 (Moore-Penrose-Inverse)

Beweisen Sie den Satz der Vorlesung: Falls

$$M = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

mit $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal und $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ invertierbar, so ist die Moore-Penrose-Inverse M^+ gegeben durch

$$M^+ = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T.$$