Technische Universität Berlin Sommersemester 2010
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 11. Mai 2010

Kontrolltheorie

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 19.5.2010

Aufgabe 6 (Charakterisierung des Raums $\mathcal{K}$)

Zeigen Sie, dass für alle $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt: $\mathcal{K} := \text{Bild}\big(\mathcal{K}(A, B)\big)$ ist der kleinste A-invariante Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der $\text{Bild}(B)$ enthält.
Hinweis: Für die A-Invarianz benötigt man den Satz von Cayley-Hamilton.

Aufgabe 7 (Hautus-Test für stabilisierbare Systeme)

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für LTI Systeme der Form $\dot{x} = Ax + Bu$ (die Gleichung $y = Cx + Du$ spielt hier wieder keine Rolle, deshalb sagt man auch, daß (A, B) stabilisierbar ist):

a) Das LTI System ist stabilisierbar (bzw. (A, B) ist stabilisierbar).

b) Falls p ein Linkseigenvektor von A zu einem Eigenwert in der abgeschlossenen rechten komplexen Halbebene ist, dann gilt $p^*B \neq 0$.

c) $\text{Rang}\left([\, A - \lambda I,\ B\,]\right) = n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}\,(\lambda) \geq 0$.

d) Sei $A = V \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} V^T$, $B = V \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ die Kalman-Zerlegung von (A, B), dann gilt $\Lambda\,(A_3) \subset \mathbb{C}^-$.

Hinweis: Die Implikationen b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) lassen sich analog zur Steuerbarkeit beweisen. Etwas schwieriger ist der Nachweis a) $\Rightarrow$ b). Hier nehme man einen Linkseigenvektor p von A zu λ her und betrachte $z(t) = e^{\lambda t}p$. Welche DGL löst z? Was lässt sich sonst noch über z sagen? Man betrachte dann $x(t;u)^T z_1(t)$, zeige, dass diese Funktion konstant ist und leite dann einen Widerspruch her.

Aufgabe 8 (Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit)

Überprüfen Sie die folgenden Systeme auf Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit.

a) $\dot{x} = x + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T u$

b) $$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Aufgabe 9 (Stabilisierbare, aber nicht steuerbare Steuerungsprobleme)

Konstruieren Sie ein Steuerungsproblem $\dot{x} = Ax + Bu$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, welches nicht steuerbar ist, aber stabilisierbar.

Aufgabe 10 (Systemtransformationen)

Betrachten Sie das LTI System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x^0, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Eigenschaften Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit invariant sind bzgl. der Zustandsraumtransformationen

(i) Basiswechsel im Zustandsraum: $x \to Px$ für $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär,

(ii) Basiswechsel im Steuerungsraum: $u \to Qu$ für $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulär,

(iii) Basiswechsel im Beobachtungsraum: $y \to Ry$ für $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ regulär.

Zeigen Sie weiter, dass Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit auch invariant sind bzgl.

(iv) linearer Zustandsrückführung: $u \to Fx + u$ für $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$.