Technische Universität Berlin Sommersemester 2010
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 27. April 2010

Kontrolltheorie

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 5.5.2010

Aufgabe 4 (Fundamentallösung, adjungierte Gleichung)

Es sei $\Phi(t,s)$ die Fundamentallösung von $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Zeigen Sie:

1) $\Phi(t,s) = \Phi(t,\tau)\Phi(\tau,s)$ für alle $t,s,\tau \in \mathbb{R}$.

2) $\Phi(t,t) = I_n$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

3) $\Phi(t,s)$ ist invertierbar für alle $t,s \in \mathbb{R}$ und es gilt: $\Phi(t,s)^{-1} = \Phi(s,t)$.

4) $\dfrac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s) = -\Phi(t,s)A(s)$.

5) Für die Fundamentallösung $\Psi(t,s)$ der adjungierten Gleichung $\dot{z}(t) = -A(t)^T z(t)$ gilt:

$$\Psi(t,s) = \Phi(s,t)^T.$$

Aufgabe 5 (Steuerbarkeits-Grammatrix)

a) Zeigen Sie: Die (t_0,t_1)-Steuerbarkeits-Grammatrix $P(t_0,t_1)$ eines LTV Systems ist genau dann positiv definit, wenn

$$\hat{P}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,t)B(t)B(t)^T\Phi(t_1,t)\,dt$$

positiv definit ist.

b) Zeigen Sie: Ein asymptotisch stabiles (für $u \equiv 0$) LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$ ist genau dann steuerbar, wenn

$$P := \int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}\,dt$$

positiv definit ist.

Aufgabe 6 (Charakterisierung des Raums $\mathcal{K}$)

Zeigen Sie, dass für alle $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt: $\mathcal{K} := \mathrm{Bild}(\mathcal{K}(A,B))$ ist der kleinste A-invariante Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der $\mathrm{Bild}(B)$ enthält.