Technische Universität Berlin Sommersemester 2010
Institut für Mathematik
C. Mehl 13. April 2010

Kontrolltheorie

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 21.4.2010

Aufgabe 1 (Invertiertes Pendel)

Betrachte das mathematische Modell des gesteuerten invertierten Pendels, welches nach Linearisierung durch die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t)$$

gegeben ist. Hier ist $\varphi(t) = \theta(t) - \pi$ die Winkelabweichung des Pendels aus der aufrechten Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und $u(t)$ das einwirkende Drehmoment.

a) Zeigen Sie, dass für proportionales Feedback $u(t) = -\alpha\varphi(t)$ mit $\alpha < 1$ gilt: Erfüllen die Anfangswerte $\dot{\varphi}(0) = -\varphi(0)\sqrt{1-\alpha}$, so folgt $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

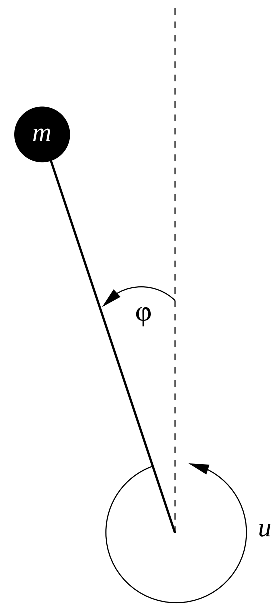

Abbildung 1: Invertiertes Pendel

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Betrachten Sie die Funktion

$$V(x,y) := \cos x - 1 + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + y^2).$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$V(\varphi(x), \dot{\varphi}(x)) = const.$$

entlang Lösungen der nichtlinearen Pendelgleichung mit proportionalem Feedback,

$$\ddot{\varphi}(t) - \sin\varphi(t) + \alpha\varphi(t) = 0. \qquad (1)$$

Zeigen Sie, dass es Anfangsbedingungen der Form $\varphi(0) = \varepsilon$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ gibt, so dass die Lösung von (1) für beliebig kleine ε **nicht** $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) = 0$ erfüllt.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $x = 0$ eine isolierte Nulltstelle von $V(x, 0)$ ist. (Dies folgt, da V analytisch ist, denn sonst wäre V konstant Null.)

c) Für welche Werte α, β ist die Lösung des geschlossenen Regelkreises bei PD Feedback stabil/asymptotisch stabil und nicht oszillatorisch?

Aufgabe 2 (Steuerung einer Parabolantenne)

Das Steuerungsproblem einer Parabolantenne, die immer auf einen Satelliten oder ein Raumfahrzeug gerichtet ist, führt auf folgende vereinfachte Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \\ j\dot{\omega}(t) &= -r\omega(t) + ku(t), \end{aligned} \tag{2}$$

wobei ϕ der Drehwinkel der Antenne, ω die Winkelgeschwindigkeit, j das Trägheitsmoment des Gleichstrommotors, der die Drehung bewirkt, r ein Reibungskoeffizient und k ein Verstärkungsfaktor ist. Unsere Steuerungsfunktion ist die Eingangsspannung $u(t)$, durch den der Gleichstrommotor betrieben wird. Bestimmen Sie die Lösung von (2) mit den Anfangswerten $\phi(0) = 0$ und $\omega(0) = \omega_0$ für die folgenden Steuerungsfunktionen:

a) $u(t) = \alpha\omega(t)$, α konstant

b) $u(t) = 0$, (freies System)

c) $u(t) = e^{-t}$

Wie kann $u(t)$ gewählt werden, so dass $\phi(1) = \pi$ gilt?

Aufgabe 3 (Steuerungsprobleme im Frequenzraum/Laplace-Transformation)

In Ingenieurbüchern wird die Steuerungstheorie oft im sogenannten Frequenzraum und nicht im Zustandsraum dargestellt, indem man das System Laplace transformiert. Ist f eine reellwertige Funktion auf $[0, \infty)$, so heißt

$$\mathcal{L}(f) := \hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

die Laplacetransformation von f. Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln:

a) $\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathcal{L}(f(t)) + \beta\mathcal{L}(g(t))$.

b) $\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$.

c) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(z)dz\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))$.

d) $\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$.

e) $\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{s-\alpha}$ für $s > \alpha$.

f) $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ für $s > 0$.

Hierbei sind f, g reellwertige Funktionen auf $[0, \infty)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie nun das LTI-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

mit konstanten Matrizen A, B, C, D. Zeigen Sie:

g) Im Frequenzraum gilt $\hat{y}(s) = H(s)\hat{u}(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$,

wobei $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. (Die Matrix $H(s)$ heißt Übertragungsmatrix.)