Householder QR-Zerlegung

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Bestimme eine Householder-Matrix P_1, die die erste Spalte von A auf den ersten Einheitsvektor spiegelt.

Householder QR-Zerlegung

$$P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Householder QR-Zerlegung

$$P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Betrachte nun die rechte untere $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix. Bestimme nun eine Householdermatrix $\hat{P}_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$, die die erste Spalte der roten Matrix auf den ersten Einheitsvektor spiegelt.

Householder QR-Zerlegung

$$P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Bette $\hat{P}_2$ in eine $n \times n$-Matrix ein:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P}_2 \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_2 beeinflusst nur den roten Teil der Matrix.

Householder QR-Zerlegung

$$P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Householder QR-Zerlegung

$$P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} \\ 0 & 0 & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} \\ 0 & 0 & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} \\ 0 & 0 & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} \end{bmatrix}$$

Und so weiter: Betrachte wieder eine Untermatrix (**rot**) und bestimme eine geeignete Householdermatrix:

$$P_3 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \hat{P}_3 \end{bmatrix}$$

Householder QR-Zerlegung

$$P_3 P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Und so weiter...

Householder QR-Zerlegung

$$P_3 P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Und so weiter...

Householder QR-Zerlegung

$$P_4P_3P_2P_1A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}* & \color{red}* & \color{red}* \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}* & \color{red}* \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}* & \color{red}* \end{bmatrix}$$

Und so weiter...

Householder QR-Zerlegung

$$P_4 P_3 P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{*} & \color{red}{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{*} & \color{red}{*} \end{bmatrix}$$

Und so weiter...

Householder QR-Zerlegung

$$P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Und so weiter... FERTIG!

Householder QR-Zerlegung

$$P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Fazit: Der Algorithmus berechnet in endlich vielen Schritten eine QR-Zerlegung der gegebenen $n \times n$ Matrix A.

Kosten: ca. $\frac{4}{3}n^3$ flops

Falls auch $Q = P_{n-1} \cdots P_1$ explizit berechnet wird: noch einmal $\frac{4}{3}n^3$ flops