Der Staircase-Algorithmus

Ziel: Berechne für das Paar (A, B) eine Form (PAP^T, PBQ) mit orthogonalen Matrizen $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, so dass der Rang von

$$\left[\, B \;\; \lambda I - A \,\right]$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ leicht abgelesen werden kann.

Der Staircase-Algorithmus

Schritt 1: Berechne eine Singulärwertzerlegung von B:

$$U_B^T B V_B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

wobei $n_1 = \text{Rang}\,(B)$, $\tilde{n} = n - n_1$ und Σ_B invertierbar ist.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ \tilde{n} \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ \tilde{n} \end{array} & \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setze $P = U_B^T$, $Q = V_B$ und datiere auf:

$$A = PAP^T, \quad B = PBQ$$

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ \tilde{n} \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ \tilde{n} \end{array} & \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schritt 2: Falls $A_{21} = 0$ höre auf. Andernfalls berechne eine SVD von A_{21}:

$$U_{21}^T A_{21} V_{21} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_2 & n_1 - n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_2 \\ \tilde{n} - n_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \Sigma_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{c} n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_2 \\ \tilde{n} - n_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

wobei Σ_{21} invertierbar ist bzw. $\widetilde{\Sigma}_{21}$ vollen Rang n_2 hat.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ \tilde{n} \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ \tilde{n} \end{array} & \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schritt 2: Falls $A_{21} = 0$ höre auf. Andernfalls berechne eine SVD von A_{21}:

$$U_{21}^T A_{21} V_{21} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_2 & n_1 - n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_2 \\ \tilde{n} - n_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \Sigma_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & n_1 \\ \begin{array}{c} n_2 \\ \tilde{n} - n_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

wobei Σ_{21} invertierbar ist bzw. $\widetilde{\Sigma}_{21}$ vollen Rang n_2 hat.

Schlüssele A und B in den **grünen Blöcken** etwas detaillierter auf.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m - n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schlüssele A und B in den **grünen Blöcken** etwas detaillierter auf. Datiere auf:

$$\tilde{n} = \tilde{n} - n_2$$

und benenne die Blöcke von A entsprechend um.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m - n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setze

$$P_2 = \begin{bmatrix} V_{21} & 0 \\ 0 & U_{21}^T \end{bmatrix}$$

und datiere auf:

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \widetilde{\Sigma}_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setze

$$P_2 = \begin{bmatrix} V_{21} & 0 \\ 0 & U_{21}^T \end{bmatrix}$$

und datiere auf:

$$A = P_2 A P_2^T, \quad B = P_2 B, \quad P = P_2 P$$

Beachte: $B_1 = V_{21}\Sigma_B$ hat immer noch Rang n_1.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \widetilde{\Sigma}_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schritt 3: Falls $A_{32} = 0$ höre auf. Andernfalls berechne eine SVD von A_{32}:

$$U_{32}^T A_{32} V_{32} = \begin{array}{c} \\ n_3 \\ \tilde{n}-n_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_3 & n_2-n_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Sigma_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ n_3 \\ \tilde{n}-n_3 \end{array} \begin{array}{c} n_2 \\ \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_{32} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

wobei Σ_{32} invertierbar ist bzw. $\widetilde{\Sigma}_{32}$ vollen Rang n_3 hat.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \widetilde{\Sigma}_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schritt 3: Falls $A_{32} = 0$ höre auf. Andernfalls berechne eine SVD von A_{32}:

$$U_{32}^T A_{32} V_{32} = \begin{array}{c} \\ n_3 \\ \tilde{n}-n_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_3 & n_2-n_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Sigma_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ n_3 \\ \tilde{n}-n_3 \end{array} \begin{array}{c} n_2 \\ \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_{32} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

wobei Σ_{32} invertierbar ist bzw. $\widetilde{\Sigma}_{32}$ vollen Rang n_3 hat.

Schlüssele A und B in den **grünen Blöcken** etwas detaillierter auf.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \widetilde{\Sigma}_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m - n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schlüssele A und B in den **grünen Blöcken** etwas detaillierter auf. Datiere auf:

$$\tilde{n} = \tilde{n} - n_3$$

und benenne die Blöcke von A entsprechend um.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \widetilde{\Sigma}_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m - n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setze

$$P_3 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & V_{32} & 0 \\ 0 & 0 & U_{32}^T \end{bmatrix}$$

und datiere auf:

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & \widetilde{\Sigma}_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setze

$$P_3 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & V_{32} & 0 \\ 0 & 0 & U_{32}^T \end{bmatrix}$$

und datiere auf:

$$A = P_3 A P_3^T, \quad B = P_3 B, \quad P = P_3 P$$

Nur die **blauen Blöcke** haben sich verändert, nicht jedoch B_1.
Beachte: $A_{21} = V_{32}\widetilde{\Sigma}_{21} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} & 0 \end{bmatrix}$ mit $\tilde{A}_{21}$ invertierbar.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & \widetilde{\Sigma}_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schritt 4: Falls $A_{43} = 0$ höre auf. Andernfalls berechne eine SVD von A_{43}:

$$U_{43}^T A_{43} V_{43} = \begin{array}{c} \\ n_4 \\ \tilde{n}-n_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_4 & n_3-n_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Sigma_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ n_4 \\ \tilde{n}-n_4 \end{array} \begin{array}{c} n_3 \\ \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_{43} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

wobei Σ_{43} invertierbar ist bzw. $\widetilde{\Sigma}_{43}$ vollen Rang n_4 hat.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & \widetilde{\Sigma}_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schritt 4: Falls $A_{43} = 0$ höre auf. Andernfalls berechne eine SVD von A_{43}:

$$U_{43}^T A_{43} V_{43} = \begin{array}{c} \\ n_4 \\ \tilde{n}-n_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_4 & n_3-n_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Sigma_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ n_4 \\ \tilde{n}-n_4 \end{array} \begin{array}{c} n_3 \\ \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_{43} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

wobei Σ_{43} invertierbar ist bzw. $\widetilde{\Sigma}_{43}$ vollen Rang n_4 hat.

Schlüssele A und B in den **grünen Blöcken** etwas detaillierter auf.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ 0 & \widetilde{\Sigma}_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m - n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schlüssele A und B in den **grünen Blöcken** etwas detaillierter auf. Datiere auf:

$$\tilde{n} = \tilde{n} - n_4$$

und benenne die Blöcke von A entsprechend um.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ 0 & \widetilde{\Sigma}_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m - n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setze

$$P_4 = \mathsf{diag}\,(I_{n_1}, I_{n_2}, V_{43}, U_{43}^T)$$

und datiere auf:

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & \widetilde{\Sigma}_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setze

$$P_4 = \text{diag}\,(I_{n_1}, I_{n_2}, V_{43}, U_{43}^T)$$

und datiere auf:

$$A = P_4 A P_4^T, \quad B = P_4 B, \quad P = P_4 P$$

Nur die **blauen Blöcke** haben sich verändert, nicht jedoch B_1 und A_{21}.
Beachte: $A_{32} = V_{43}\widetilde{\Sigma}_{32} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{32} & 0 \end{bmatrix}$ mit $\tilde{A}_{32}$ invertierbar.

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & \widetilde{\Sigma}_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schritt 5: Falls $A_{54} = 0$ höre auf. Andernfalls berechne eine SVD von A_{54} usw...

Der Staircase-Algorithmus

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \tilde{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & \widetilde{\Sigma}_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \tilde{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & m-n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Schritt 5: Falls $A_{54} = 0$ höre auf. Andernfalls berechne eine SVD von A_{54} usw...

Der Algorithmus bricht nach endlich vielen Schritten (sagen wir s Schritten) ab, denn entweder haben wir $A_{s+1,s} = 0$ oder $\tilde{n} = 0$, da $\tilde{n}$ in jedem Schritt kleiner wird. (Schlimmstenfalls benötigt der Algorithmus $n-1$ Schritte.)