

Kontrolltheorie

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 1.7.2005

Aufgabe 20 (Hamiltonische Matrizen)

Sei $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ und es bezeichne $J := J_{2n}$ die Matrix

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeige: Folgende Aussagen sind äquivalent.

- i) $\mathcal{H}$ ist Hamiltonisch, d.h. $\mathcal{H}^T J + J\mathcal{H} = 0$.
- ii) $J\mathcal{H}$ ist symmetrisch.
- iii) Es gibt $F, G, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $G = G^T$ und $H = H^T$, so dass

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & -F^T \end{bmatrix}.$$

- iv) $\mathcal{H}$ ist schief-adjungiert bzgl. des inneren Produktes

$$\langle x, y \rangle_J := y^T Jx, \quad x, y \in \mathbb{R}^{2n},$$

d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt:

$$\langle \mathcal{H}x, y \rangle_J = -\langle x, \mathcal{H}y \rangle_J$$

Aufgabe 21 (Hamiltonische und symplektische Matrizen)

Es sei $\mathcal{H}_{2n}$ die Menge der Hamiltonischen Matrizen, sowie $\mathcal{S}_{2n}$ die Menge der symplektischen Matrizen. Eine Matrix S heißt *symplektisch*, falls S orthogonal bzgl. des inneren Produkts $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ ist, d.h., falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt:

$$\langle Sx, Sy \rangle_J = \langle x, y \rangle_J$$

Zeige:

- i) S ist genau dann symplektisch, falls $S^T J S = J$.
- ii) $\mathcal{S}_{2n}$ ist eine Gruppe.

iii) $\mathcal{H}_{2n}$ ist die von $\mathcal{S}_{2n}$ abgeleitete Lie-Algebra, d.h. die Elemente von $\mathcal{H}_{2n}$ sind die Lösungen $H \in \mathbb{R}^{2n, 2n}$ der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\langle (I + tH)x, (I + tH)y \rangle_J = \langle x, y \rangle_J \right) \Big|_{t=0} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^{2n}$$

und $\mathcal{H}_{2n}$ ist eine (nicht assoziative) Algebra bzgl. des Produktes

$$[H_1, H_2] := H_1 H_2 - H_2 H_1,$$

welches folgende Eigenschaften erfüllt:

- a) $[H_1, H_2] \in \mathcal{H}_{2n}$ für alle $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{2n}$.
- b) $[H, H] = 0$ für alle $H \in \mathcal{H}_{2n}$.
- c) $[H_1 + H_2, H_3] = [H_1, H_3] + [H_2, H_3]$ für alle $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{H}_{2n}$.
- d) $[[H_1, H_2], H_3] + [[H_2, H_3], H_1] + [[H_3, H_1], H_2] = 0$ für alle $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{H}_{2n}$. (Jacobi-Identität)

iv) Für alle $S \in \mathcal{S}_{2n}$, $H \in \mathcal{H}_{2n}$ gilt $S^{-1} H S \in \mathcal{H}_{2n}$.

Aufgabe 22 (Isotrope invariante Unterräume)

Sei $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ Hamiltonisch und sei

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r}$$

mit $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, so dass die Spalten von X einen $\mathcal{H}$ -invarianten Unterraum $\mathcal{U}$ aufspannen, d.h., es gilt

$$\mathcal{H}X = XZ$$

für eine Matrix $Z \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Zeige: Liegen die zu $\mathcal{U}$ gehörigen Eigenwerte in der linken offenen Halbebene (d.h. $\sigma(Z) \subseteq \mathbb{C}^-$), so ist $\mathcal{U}$ isotrop, d.h. für alle $x, y \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\langle x, y \rangle_J = 0.$$

Hinweis: Lyapunov-Theorie.