Technische Universität Berlin Sommersemester 2005
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 13. Mai 2005

Kontrolltheorie

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 20.5.2005

Aufgabe 8 (Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit)

Überprüfe die folgenden Systeme auf Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit.

a) $\dot{x} = x + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T u$

b) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

c) $\dot{x} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} u$

Aufgabe 9 (Stabilisierbare, aber nicht steuerbare Steuerungsprobleme)

Konstruiere ein Steuerungsproblem $\dot{x} = Ax+Bu$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, welches nicht steuerbar ist, aber stabilisierbar.

Aufgabe 10 (Systemtransformationen)

Betrachte das LTI System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x^0, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Zeige, daß die Eigenschaften Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit invariant sind bzgl. der Zustandsraumtransformationen

(i) Basiswechsel im Zustandsraum: $x \to Px$ für $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär,

(ii) Basiswechsel im Steuerungsraum: $u \to Qu$ für $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulär,

(iii) Basiswechsel im Beobachtungsraum: $y \to Ry$ für $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ regulär,

(iv) lineare Zustandsrückführung: $u \to Fx + u$ für $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

Aufgabe 11 (Singulärwertzerlegung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und sei $A = U\Sigma V^T$ die Singulärwertzerlegung (SVD) von A. Zeige:

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

ist die beste Rang-k-Approximation an A im Sinne der 2-Norm, d.h.

$$\min_{\substack{B\in\mathbb{R}^{n\times m}\\ \text{Rang}\, B=k}} \|A-B\|_2 = \|A-A_K\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Aufgabe 12 (Numerischer Rang)

Betrachte für $1 > c > 0$, $s = \sqrt{1-c^2}$ die Matrix

$$T_n = \operatorname{diag}(1, s, \dots, s^{n-1}) \begin{bmatrix} 1 & -c & \cdots & -c \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -c \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zeige, dass

$$\sigma_n(T_n) \equiv \min_{\|x\|_2=1} \|T_n x\|_2 \le \frac{s^{n-1}}{c(c+1)^{n-2}}.$$

Was bedeutet das für die Rangbestimmung von T_n? (z.B. $n = 100$, $c = 0.2$)