Technische Universität Berlin Sommersemester 2005
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 3. Mai 2005

Kontrolltheorie

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 13.5.2005

Aufgabe 4 (Fundamentallösung, adjungierte Gleichung)

Es sei $\Phi(t,s)$ die Fundamentallösung von $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

a) Zeige folgende Eigenschaften der Fundamentallösung:

   (a) $\Phi(t,t) = I_n$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

   (b) $\Phi(t,s) = \Phi(t,\tau)\Phi(\tau,s)$ für alle $t,s,\tau \in \mathbb{R}$.

   (c) $\Phi(t,s)$ ist invertierbar für alle $t,s \in \mathbb{R}$ und es gilt: $\Phi(t,s)^{-1} = \Phi(s,t)$.

   (d) $\dfrac{\partial \Phi(t,s)}{\partial s} = -\Phi(t,s)A(s)$.

b) Zeige, daß für die Fundamentallösung $\Psi(t,s)$ der adjungierten Gleichung $\dot{z}(t) = -A(t)^T z(t)$ gilt: $\Psi(t,s) = \Phi(s,t)^T$.

Aufgabe 5 (Steuerbarkeits-Gram'sche)

a) Zeige: Die (t_0,t_1)-Steuerbarkeits-Gram'sche $P(t_0,t_1)$ eines LTV Systems ist genau dann positiv definit, wenn

$$\hat{P}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,t)B(t)B(t)^T\Phi(t_1,t)\,dt$$

positiv definit ist.

b) Zeige, daß die Steuerbarkeit eines asymptotisch stabilen (für $u \equiv 0$) LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$ durch positive Definitheit der *Steuerbarkeits-Gram'schen*

$$P := \int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}\,dt$$

charakterisiert ist.

Aufgabe 6 (Hautus-Test für stabilisierbare Systeme)

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen für LTI Systeme der Form $\dot{x} = Ax + Bu$ (die Gleichung $y = Cx + Du$ spielt hier wieder keine Rolle, deshalb sagt man auch, daß (A, B) stabilisierbar ist):

a) Das LTI System ist stabilisierbar (bzw. (A, B) ist stabilisierbar).

b) Falls p ein Linkseigenvektor von A zu einem Eigenwert in der abgeschlossenen rechten komplexen Halbebene ist, dann gilt $p^* B \neq 0$.

c) $\operatorname{Rang}([\, A - \lambda I,\ B\,]) = n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$.

d) Sei $A = V \left[\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{smallmatrix}\right] V^T$, $B = V \left[\begin{smallmatrix} B_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ die Kalman-Zerlegung von (A, B), dann gilt $\Lambda(A_3) \subset \mathbb{C}^-$.

Aufgabe 7 (Topologie von $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$)

Zeige, daß die Menge $\{(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \,|\, (A, B) \text{ steuerbar}\}$ offen und dicht in $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ ist.
<u>Hinweis:</u> Verwende als Metrik auf $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ z.B.

$$d\left((A_1, B_1), (A_2, B_2)\right) = |A_1 - A_2| + |B_1 - B_2|,$$

wobei $|M| := \sum_{i,j=1}^{k,\ell} |m_{ij}|$ für $M \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$.