

Kontrolltheorie

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 13.5.2005

Aufgabe 4 (Fundamentallösung, adjungierte Gleichung)

Es sei $\Phi(t, s)$ die Fundamentallösung von $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

a) Zeige folgende Eigenschaften der Fundamentallösung:

(a) $\Phi(t, t) = I_n$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\Phi(t, s) = \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, s)$ für alle $t, s, \tau \in \mathbb{R}$.

(c) $\Phi(t, s)$ ist invertierbar für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und es gilt: $\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)$.

(d) $\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial s} = -\Phi(t, s)A(s)$.

b) Zeige, daß für die Fundamentallösung $\Psi(t, s)$ der adjungierten Gleichung $\dot{z}(t) = -A(t)^T z(t)$ gilt: $\Psi(t, s) = \Phi(s, t)^T$.

Aufgabe 5 (Steuerbarkeits-Gram'sche)

a) Zeige: Die (t_0, t_1) -Steuerbarkeits-Gram'sche $P(t_0, t_1)$ eines LTV Systems ist genau dann positiv definit, wenn

$$\hat{P}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)B(t)^T\Phi(t_1, t) dt$$

positiv definit ist.

b) Zeige, daß die Steuerbarkeit eines asymptotisch stabilen (für $u \equiv 0$) LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$ durch positive Definitheit der *Steuerbarkeits-Gram'schen*

$$P := \int_0^{\infty} e^{At}BB^Te^{A^T t} dt$$

charakterisiert ist.

Aufgabe 6 (Hautus-Test für stabilisierbare Systeme)

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen für LTI Systeme der Form $\dot{x} = Ax + Bu$ (die Gleichung $y = Cx + Du$ spielt hier wieder keine Rolle, deshalb sagt man auch, daß (A, B) stabilisierbar ist):

- Das LTI System ist stabilisierbar (bzw. (A, B) ist stabilisierbar).
- Falls p ein Linkseigenvektor von A zu einem Eigenwert in der abgeschlossenen rechten komplexen Halbebene ist, dann gilt $p^*B \neq 0$.
- $\text{Rang}([A - \lambda I, B]) = n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(\lambda) \geq 0$.
- Sei $A = V \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} V^T$, $B = V \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ die Kalman-Zerlegung von (A, B) , dann gilt $\Lambda(A_3) \subset \mathbb{C}^-$.

Aufgabe 7 (Topologie von $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$)

Zeige, daß die Menge $\{(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \mid (A, B) \text{ steuerbar}\}$ offen und dicht in $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ ist.

Hinweis: Verwende als Metrik auf $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ z.B.

$$d((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = |A_1 - A_2| + |B_1 - B_2|,$$

wobei $|M| := \sum_{i,j=1}^{k,\ell} |m_{ij}|$ für $M \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$.