Technische Universität Chemnitz **Fakultät für Mathematik**

Priv.-Doz. Dr. Ch. Mehl & V. Sokolov

4. Übung Kontrolltheorie (WS 04/05)

Aufgabe 1: (Charakterisierung der Beobachtbarkeit)
Zeige, daß ein LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, $x(0) = x^0$ mit $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$ genau dann beobachtbar ist, wenn die Lyapunovgleichung

$$A^T Q + QA + C^T C = 0$$

eine eindeutige, positiv definite Lösung hat.

Aufgabe 2: (Partielle Stabilisierung)
Es sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ und n sehr groß, also $n > 1000$. Oft sind nur wenige Eigenwerte (*Pole des Systems*) von A instabil, haben also nicht-negativen Realteil. Deshalb ist es eigentlich nicht notwendig, das gesamte System zu stabilisieren — es reicht, die instabilen Pole durch ein Zustandsfeedback in die offene linke Halbebene zu bringen. Nehme dazu an, daß

$$\Lambda(A) = \Lambda_- \cup \Lambda_+ := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \cup \{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n\}$$

mit $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ für $j = 1, \ldots, k$ und $\mathrm{Re}(\lambda_j) \geq 0$ für $j = k+1, \ldots, n$.

a) Entwickle einen Algorithmus zur partiellen Stabilisierung basierend auf der Schurform von A. Der Algorithmus soll also $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so berechnen, daß $\Lambda(A+BF) = \Lambda_- \cup \{\mu_{k+1}, \ldots, \mu_n\}$, $\mathrm{Re}(\mu_j) < 0$.

b) Partielle Stabilisierung läßt sich auch mit Hilfe der *Signumfunktions-Methode* durchführen. Sei dazu $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \Lambda(A)$ und

$$A = S \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} S^{-1}, \qquad \Lambda(J_-) = \Lambda_-, \quad \Lambda(J_+) = \Lambda_+,$$

die Jordan-Normalform von A. Dann ist

$$\mathrm{sign}(A) := S \begin{bmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

(i) Zeige: Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\mathrm{sign}(TAT^{-1}) = T\,\mathrm{sign}(A)T^{-1}$.

(ii) Zeige: $P_- := \frac{1}{2}(I - \mathrm{sign}(A))$ ist ein Projektor auf $\mathcal{S}_-$, den A-invarianten Unterraum zu Λ_-. (D.h., $P_-^2 = P_-$, $\mathrm{Bild}(P_-) = \mathcal{S}_-$). Was ist der Rang von P_-?

(iii) Sei

$$P_- = QRP = Q \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P$$

eine QR Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von P_-, d.h. $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal, $R_1 \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ist reguläre obere Dreiecksmatrix, und P ist eine Permutationsmatrix. Zeige:

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda(A_1) = \Lambda_-, \quad \Lambda(A_3) = \Lambda_+.$$

(iv) Seien $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $\Lambda(G), \Lambda(H) \subset \mathbb{C}^+$ und betrachte die Sylvestergleichung

$$GX + XH = W$$

Zeige:

$$\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} G & W \\ 0 & -H \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} I_n & 2X \\ 0 & -I_m \end{bmatrix},$$

wobei X die Lösung obiger Sylvestergleichung ist.

(v) Es gilt $\operatorname{sign}(A) = \lim_{j\to\infty} A_j$, wobei

$$A_0 := A, \qquad A_{j+1} = \frac{1}{2}(A_j + A_j^{-1}), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Entwickle und implementiere damit einen Algorithmus zur partiellen Stabilisierung basierend auf (iii), (iv) und dem folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 1 *Es sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ stabilisierbar und $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > \rho(A)$, wobei $\rho(A) = \max\{\, |\lambda| : \lambda \in \Lambda(A)\,\}$ der Spektralradius von A ist. Ist X die eindeutige Lösung der Lyapunov-Gleichung*

$$(A + \beta I)X + X(A + \beta I)^\top = 2BB^\top,$$

dann ist $F = -B^\top Z^+$ eine stabilisierende Feedback-Matrix von (A, B).

Aufgabe 3: (Positiv semidefinite Matrizen)

Sei $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & 0 \end{bmatrix}$ eine symmetrische positiv semidefinite Matrix. Beweise, daß unter dieser Voraussetzung $A_2 = 0$ gilt.