Technische Universität Chemnitz **Fakultät für Mathematik**

Priv.-Doz. Dr. Ch. Mehl & V. Sokolov

3. Übung Kontrolltheorie (WS 04/05)

Aufgabe 1: (Systemtransformationen)
Betrachte das LTI System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x^0, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Zeige, daß die Eigenschaften Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit invariant sind bzgl. der Zustandsraumtransformationen

(i) Basiswechsel im Zustandsraum: $x \to Px$ für $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär,

(ii) Basiswechsel im Steuerungsraum: $u \to Qu$ für $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ regulär,

(iii) Basiswechsel im Beobachtungssraum: $y \to Ry$ für $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ regulär,

(iv) lineare Zustandsrückführung: $u \to Fx + u$ für $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

(v) lineare Ausgangsrückführung: $u \to Gy + v$ für $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

Aufgabe 2: (Eigenschaften des Kronecker-Produkts)
Es seien A, B, C, D reelle Matrizen geeigneter Dimensionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige folgende Eigenschaften des Kroneckerprodukts

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1,r}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,r}B \end{bmatrix},$$

und des vec-Operators

$$vec : \mathbb{R}^{n \times r} \to \mathbb{R}^{n \cdot r} \ : \ A \to [a_{11}, \dots, a_{n,1}, a_{12}, \dots, a_{n,2}, \dots, a_{n,r}]^T .$$

a) $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$,

b) $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$,

b) $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$,

d) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$,

e) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$,

f) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$,

g) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$,

h) $\operatorname{vec}(ABC) = (C^T \otimes A) \operatorname{vec}(B)$.

Aufgabe 3: (Spektrum des Kronecker-Produkts)

Es sei $p(x,y)$ ein komplexes Polynom in zwei Variablen, d.h. $p(x,y)=\sum_{j,k=1}^{\ell}\alpha_{jk}x^jy^k$ mit $x,y,\alpha_{jk}\in\mathbb{C}$. Für $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ und $B\in\mathbb{C}^{m\times m}$ läßt sich damit ein matrixwertiges Polynom definieren, in dem die Multiplikation durch das Kronecker-Produkt ersetzt wird:

$$p(A,B):=\sum_{j,k=1}^{\ell}\alpha_{jk}(A^j\otimes B^k).$$

Z.B. für $p(x,y)=2x+3xy^2-y^3$ ist

$$p(A,B)=2(A\otimes I_m)+3(A\otimes B^2)-(I_n\otimes B^3).$$

Zeige den *Satz von Stephanos*:

> *Sind die Spektren von A und B gegeben durch $\sigma(A)=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$, $\sigma(B)=\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$, dann gilt $\sigma(p(A,B))=\{p(\sigma_j,\mu_k),\ j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,m\}$.*

Folgere durch Wahl eines geeigneten Polynoms, daß

(i) $\sigma(A\otimes B)=\{\sigma_j\cdot\mu_k,\ j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,m\}$,

(ii) $\sigma((I_m\otimes A)+(B^T\otimes I_n))=\{\sigma_j+\mu_k,\ j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,m\}$.

Aufgabe 4: (Lösung der Sylvestergleichung)

Gegeben seien die Matrizen $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}m\times m$ und $W\in\mathbb{R}^{n\times m}$ Zeige, dass die Sylvestergleichung $AX+XB=W$ mit der Unbekannten $X\in\mathbb{R}^{n\times m}$ genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\emptyset$.

Aufgabe 5: (Numerischer Rang)

Betrachte für $c>0$, $s=\sqrt{1-c^2}$ die Matrix

$$T_n=\operatorname{diag}(1,s,\dots,s^{n-1})\begin{pmatrix}1 & -c & \cdots & -c\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -c\\ 0 & \cdots & 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zeige: $\sigma_n(T_n)\equiv\min_{\|x\|_2=1}\|T_nx\|_2\le\dfrac{s^{n-1}}{c(c+1)^{n-2}}$. Was bedeutet das für die Rangbestimmung von T_n?
(z.B. $n=100$, $c=0.2$)