Technische Universität Chemnitz **Fakultät für Mathematik**

Priv.-Doz. Dr. Ch. Mehl & V. Sokolov

2. Übung Kontrolltheorie (WS 04/05)

Aufgabe 1: (Fundamentallösung, adjungierte Gleichung)

Sei $\Phi(t,s)$ die Fundamentallösung von $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Zeige, daß für die Fundamentallösung $\Psi(t,s)$ der adjungierten Gleichung $\dot{z}(t) = -A(t)^T z(t)$ gilt: $\Psi(t,s) = \Phi(s,t)^T$.

Aufgabe 2: (Steuerbarkeits-Gram'sche)

a) Zeige: Die (t_0,t_1)-Steuerbarkeits-Gram'sche $P(t_0,t_1)$ eines LTV Systems ist genau dann positiv definit, wenn

$$\hat{P}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,t)B(t)B(t)^T\Phi(t_1,t)\,dt$$

positiv definit ist.

b) Zeige, daß die Steuerbarkeit eines asymptotisch stabilen (für $u \equiv 0$) LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$ durch positive Definitheit der *Steuerbarkeits-Gram'schen*

$$P := \int_0^\infty e^{At}BB^T e^{A^T t}\,dt$$

charakterisiert ist.

Aufgabe 3: (Hautus-Test für stabilisierbare Systeme)

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen für LTI Systeme der Form $\dot{x} = Ax + Bu$ (die Gleichung $y = Cx$ spielt hier keine Rolle, deshalb sagt man auch, daß (A,B) stabilisierbar ist):

a) Das LTI System ist stabilisierbar.

b) Falls p ein Linkseigenvektor von A zu einem Eigenwert in der abgeschlossenen rechten komplexen Halbebene ist, dann gilt $p^*B \neq 0$.

c) $\mathrm{Rang}\,([\,A - \lambda I,\ B\,]) = n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(\lambda) \geq 0$.

d) Sei $A = V \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} V^T$, $B = V \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ die Kalman-Zerlegung von (A,B), dann gilt $\Lambda\,(A_3) \subset \mathbb{C}^-$.

Aufgabe 4: (Steuerbarkeitsmenge)

Betrachte das LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x^0$. Es sei $x(t;u,x^0)$ die zugehörige Lösungstrajektorie und

$$\mathcal{C}_{\hat{x}}(t) := \{x^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathcal{U}_{ad},\ \text{so daß } x(t;u,x^0) = \hat{x}\},$$

sowie $\mathcal{C}_{\hat{x}} := \bigcup\limits_{t>0} \mathcal{C}_{\hat{x}}(t)$.

Zeige, daß $\mathcal{C}_{\hat{x}} = \mathbb{R}^n$ für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $\mathcal{C}_0 = \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5: (Topologie von $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$)

Zeige, daß die Menge $\{(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \mid (A,B) \text{ steuerbar}\}$ offen und dicht in $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ ist.
Hinweis: Verwende als Metrik auf $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ z.B.

$$d\,((A_1,B_1),(A_2,B_2)) = |A_1 - A_2| + |B_1 - B_2|,$$

wobei $|M| := \sum_{i,j=1}^{k,\ell} |m_{ij}|$ für $M \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$.