**Technische Universität Chemnitz** **Fakultät für Mathematik**

**Priv.-Doz. Dr. Ch. Mehl & V. Sokolov**

# 1. Übung Kontrolltheorie (WS 04/05)

**Aufgabe 1: (Invertiertes Pendel)**

Betrachte das mathematische Modell des gesteuerten invertierten Pendels, welches nach Linearisierung durch die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t)$$

gegeben ist. Hier ist $\varphi(t) = \theta(t) - \pi$ die Winkelabweichung des Pendels aus der aufrechten Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und $u(t)$ das einwirkende Drehmoment.

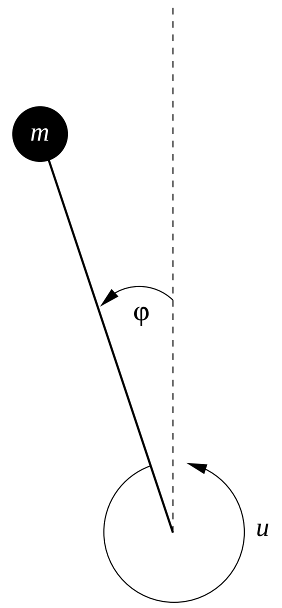


Abbildung 1: Invertiertes Pendel

a) Zeige, daß für proportionales Feedback $u(t) = -\alpha\varphi(t)$ mit $\alpha < 1$ gilt: Erfüllen die Anfangswerte $\dot{\varphi}(0) = -\varphi(0)\sqrt{1-\alpha}$, so folgt $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Betrachte die ("Energie-")Funktion

$$V(x, y) := \cos x - 1 + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + y^2).$$

Zeige daß $V(\varphi(x), \dot{\varphi}(x)) = const.$ entlang Lösungen der nichtlinearen Pendelgleichung mit proportionalem Feedback,

(1) $$\ddot{\varphi}(t) - \sin\varphi(t) + \alpha\varphi(t) = 0.$$

Zeige, daß es Anfangsbedingungen der Form $\varphi(0) = \varepsilon$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ gibt, so daß die Lösung von (1) für beliebig kleine $\varepsilon$ **nicht** $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) = 0$ erfüllt.

Hinweis: Verwende, daß $x = 0$ eine isolierte Nulltstelle von $V(x, 0)$ ist, da $V$ analytisch ist.

c) Für welche Werte $\alpha, \beta$ ist die Lösung des geschlossenen Regelkreises bei PD Feedback stabil/asymptotisch stabil und nicht oszillatorisch?

**Aufgabe 2: (Nichtlineares Pendel)**

Schreibe ein Matlab Programm zur Simulation des geregelten invertierten Pendels. Das Programm soll Werte für $\alpha, \beta$ sowie für die Anfangsposition und -geschwindigkeit abfragen und die Lösungstrajektorien für das linearisierte sowie das nichtlineare Pendel grafisch in einem geeigneten Zeitintervall $[0, t_f]$ ausgeben.
Gib Werte für $\alpha, \beta, \varphi(0), \dot{\varphi}(0)$ an, für welche die mit Hilfe der Linearisierung bestimmte PD Regelung schlecht funktioniert. Wenn möglich, bestimme Werte, für die das asymptotische Verhalten des geregelten Pendels instabil ist, obwohl die selbe Regelung das linearisierte Pendel stabilisiert.

**Aufgabe 3: (Stabilität bei LTV Systemen)**

Betrachte das ungesteuerte ($u(t) \equiv 0$) LTV System

(2) $$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = [c_1, c_2]^T,$$

mit

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

Beachte: Für $x(0) = 0$ ist $x(t) \equiv 0$ eine Gleichgewichtslage des Systems.

a) Seien

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= \cos^2 3t - 5\sin^2 3t, \\ a_{12}(t) &= -6\cos 3t \sin 3t + 3, \\ a_{21}(t) &= -6\cos 3t \sin 3t - 3, \\ a_{22}(t) &= \sin^2 3t - 5\cos^2 3t. \end{aligned}$$

Bestimme die Eigenwerte von $A(t)$. Bestimme die Lösung von (2) für $c_2 = 0$ mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \cos 3t + \alpha_3 e^{\alpha_4 t} \sin 3t, \\ x_2(t) &= \beta_1 e^{\beta_2 t} \cos 3t + \beta_3 e^{\beta_4 t} \sin 3t. \end{aligned}$$

Was lässt sich über die Stabilität der Lösung aussagen?

b) Seien

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= \sqrt{2}(-0.1\cos(t-\pi/4)\cos t - 4.1\sin(t-\pi/4)\sin t), \\ a_{12}(t) &= \sqrt{2}(-4\cos(t-\pi/4)\sin t + \sqrt{2}/2), \\ a_{21}(t) &= \sqrt{2}(-4\sin(t-\pi/4)\cos t - \sqrt{2}/2), \\ a_{22}(t) &= \sqrt{2}(-0.1\sin(t-\pi/4)\sin t - 4.1\cos(t-\pi/4)\cos t). \end{aligned}$$

Bestimme die Eigenwerte von $A(t)$. Bestimme die Lösung von (2) mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \cos(t-\pi/4) + \alpha_3 e^{\alpha_4 t} \sin t, \\ x_2(t) &= \beta_1 e^{\beta_2 t} \sin(t-\pi/4) + \beta_3 e^{\beta_4 t} \cos t. \end{aligned}$$

Was lässt sich über die Stabilität der Lösung aussagen?

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten von $A(t)$ und der Stabilität von (2)?

**Aufgabe 4: (Topologische Eigenschaften von $\mathcal{C}$)**

Es sei $\mathcal{C}$ die Steuerbarkeitsmenge eines LTI Systems für $\hat{x} = 0$. Zeige:

a) $0 \in \operatorname{int}(\mathcal{C}) \iff \mathcal{C}$ ist offen. ($\operatorname{int}(\mathcal{M})$ bezeichnet das Innere von $\mathcal{M}$.)

b) $\mathcal{C}$ ist zusammenhängend.

c) $\mathcal{C}$ ist symmetrisch, d.h., $x_0 \in \mathcal{C} \implies -x_0 \in \mathcal{C}$.

d) $\mathcal{C}$ ist konvex.