Das Herstellen einer gemeinsamen Überzeugung

Alfred Schreiber

Proof requires a person who can give and a person who can receive.

Augustus De Morgan

Der Mathematik wird traditionell nachgesagt, ihre Lehrsätze seien dauerhaft gesicherte Wahrheiten: einmal streng bewiesen und dadurch aller Zweifel enthoben. Wirklich? René Descartes, der französische Philosoph und Mathematiker, ist für seinen radikalen Zweifel berühmt. In der ersten seiner 1641 veröffentlichten *Meditationen* stellt er sogar elementarste Gewissheiten wie $2+3=5$ in Frage; ein höheres Wesen (Gott?) könnte ihn ja täuschen, wenn er 2 und 3 addiere. In der dritten Meditation führt er aber schon den Nachweis, dass Gott existiert und vollkommen ist. Daraus schließt er in der fünften, Gott könne kein Betrüger sein, weshalb alles „klar und deutlich" Erfasste (wozu $2+3=5$ gehört) notwendig wahr sei.

Klar und deutlich lassen sich freilich nur einfache Sachverhalte erkennen; was komplizierter ist, bedarf des Beweises (oder der Widerlegung). Der Beweis ist der Weg der Erkenntnissicherung, den die Mathematik seit über zweitausend Jahren mit großem Erfolg beschreitet. Dass im Laufe so langer Zeit die Idee von dem, was ein Beweis ist und leistet, Änderungen erfahren hat, wird kaum überraschen. Ist dieser Wandel aber insgesamt so tiefgreifend, dass man am Ende die beweisende Methode selbst radikal neubewerten muss? Zu dieser Frage haben sich Mathematiker, Philosophen und Soziologen in den vergangenen Dekaden eine lebhafte und kontroverse Debatte geliefert. Die avancierteste Kritik darin will von ‚dauerhaft gesicherten Wahrheiten' nichts mehr wissen. Sie unterstellt eine neue Erkenntnislage, der nur ein von Grund auf zu revidierendes Beweisverständnis gerecht werden könne.

Schon in den 1960er Jahren hatte Imre Lakatos seine Auffassung von der quasi-empirischen Natur der Mathematik entwickelt. Später kam man sogar auf die Idee, die Geltung mathematischer Sätze sei durch soziale Faktoren zu erklären. – Sind nun von solchen Ansätzen und Thesen im Ernst praktische Auswirkungen zu erwarten, etwa eine „Semi-Rigorous Mathematical Culture" (Doron Zeilberger) oder gar „The Death of Proof" (John Horgan)? Oder soll mit ihnen nur beschrieben werden (sozusagen ehrlicher als bisher), wie die mathematische Forschung *tatsächlich* vorgeht und mit der Wahrheit umgeht?

Die These vom quasi-empirischen Charakter der Mathematik beruht nicht, wie man vielleicht meinen könnte, auf der Tatsache, dass auch Mathematikern in ihren Berechnungen und Beweisen Fehler unterlaufen können. Sie hat vielmehr ihren Hintergrund in einer erkenntnistheoretischen Aufwertung der heuristischen Arbeit. Bevor ein Problem gelöst oder ein neues Stück Theorie gewonnen ist und die zugehörigen Beweise ‚stehen', experimentiert der forschende Mathematiker auf einer unordentlichen Baustelle. Dort kann (und muss) er zunächst Spezialfälle analysieren, Vermutungen aufstellen und ggf. verwerfen, Lösungsansätze entwickeln und ihre Tragfähigkeit erproben, Argumente auf Plausibilität prüfen, vorläufige Begriffe bilden und wenn nötig revidieren und dgl. mehr.

Die traditionelle Mathematikphilosophie hatte diese Aktivitäten weitgehend ausgeblendet. Erst in Georg Pólyas Untersuchungen zum Aufgabenlösen und plausiblen Schließen erfuhren sie die ihnen gebührende Bedeutung. Lakatos, ein Schüler Pólyas, verlieh der praktischen Methodologie dann aber mit seiner 1976 postum als *Proofs and Refutations* erschienenen Fallstudie zur Eulerschen Polyederformel eine mehr philosophische Stoßrichtung. Er war überzeugt, dass man in der Mathematik nicht auf grundsätzlich andere Weise Erkenntnisse gewinnt (und sichert!) als in einer Erfahrungswissenschaft. Natürlich war ihm klar, dass ein mathematischer Satz im engeren Sinn empirisch, etwa durch eine physikalische Messung, nicht zu falsifizieren ist; daher der Zusatz „quasi". Er musste somit andere „potentielle Falsifikatoren" aufzeigen, an denen eine mathematische Theorie scheitern kann. Seine dazu vorgetragenen Überlegungen, informelle gegen formalisierte Theorien auszuspielen, sind aber fragwürdig und kommen über Ansätze nicht hinaus. Am Ende blieb nichts, was hätte rechtfertigen können, eine „Renaissance des Empirismus" in der Philosophie der Mathematik auszurufen.[1]

Der ‚Quasi-Empirismus' machte sich ein schiefes Bild von der Revision mathematischer Sätze. Eine physikalische Theorie beginnt man infrage zu stellen, wenn ihre Prognosen nicht zutreffen. Gibt es dazu eine Entsprechung in der Mathematik? Was wird denn unternommen, wenn sich eine Folgerung aus einer Aussage A als falsch erweist? Liegt ein Beweis für A vor, so wird man darin nach Fehlern suchen. Ist A eine Annahme (eine Vermutung oder ein Axiom), so gilt sie nun als widerlegt. Es könnte aber auch unbekannt sein, ob die aus A gezogene Folgerung wahr ist. Zum Beispiel lässt sich mit dem Auswahlaxiom die Existenz nicht-messbarer Mengen beweisen. Wenn dann jemand (wie Henri Lebesgue) jede Menge für messbar hält, mag er darin einen Einwand gegen das Auswahlaxiom sehen. Ein solches Rivalisieren von Hypothesen ist durchaus nicht unüblich; die Mathematik rückt damit aber doch keineswegs, wie Lakatos glaubte, in die Nähe einer Erfahrungswissenschaft.

MDMV 19 / 2011 | 158–159

Können wir also nun getrost den Spieß wieder umkehren und die Geltung mathematischer Theoreme von aller Erfahrung reinwaschen? – Hier kommt es darauf an, welche Art Erfahrung im Zusammenhang des Beweisens eine Rolle spielt.

In Beweisen führt man Aussagen auf andere Aussagen zurück und nutzt dabei einen unbewiesenen Rest (bereits etablierte Lehrsätze, spezielle lokale Voraussetzungen, Axiome der Rahmentheorie). Um sich zu vergewissern und andere von der Gültigkeit eines Theorems zu überzeugen, muss der Autor eines Beweises seinen Gedankengang, unter expliziter Angabe der darin enthaltenen Annahmen und Schlüsse, als Text objektivieren und fixieren. Dieser ist in den meisten Fällen ein Gemisch aus mathematischer Umgangssprache, Formelsymbolik und Diagrammen. – Die meisten Mathematiker teilen ein traditionelles Beweis-Ideal: Die gut motivierte, im Zusammenhang überschaubare und in gedrängter Eleganz daherkommende Argumentation, aus der möglichst auch hervorgeht, weshalb der behauptete Sachverhalt gilt. Das ist nicht immer zu haben, zur Not aber auch entbehrlich – im Unterschied zur *logischen Schlüssigkeit*, ohne die ein Beweis grundsätzlich nicht bestehen kann. Ist er sehr umfangreich oder wird er teilweise oder ganz durch Hilfsmittel erzeugt (z. B. Computer-Programme), die in ihrer Wirkungsweise nicht völlig durchschaut sind, so kann das die Prüfung der Schlüssigkeit erheblich erschweren. Nichtsdestoweniger haben auch die ‚nicht-idealen' Beweise Hausrecht in der Mathematik.

Besonders komplexe Beweise verlangen eine spezialisierte Fachöffentlichkeit. Wenn dann eventuelle Mängel behoben sind und nach sorgfältiger Prüfung durch die besten Experten(gruppen) keine Zweifel mehr an der Schlüssigkeit des Ganzen bestehen, beginnt das öffentliche Dasein des Theorems. An diesem „sozialen Prozess" der Akzeptanz ist eigentlich nichts Ungewöhnliches – außer vielleicht die Aufmerksamkeit, welche die Soziologie ihm entgegenbringt, seit sie davon überrascht wurde, dass es ihn gibt. Aus soziologischer Sicht soll nämlich nun die Geltung mathematischer Sätze aus dem Akzeptanzprozess der Forschergemeinschaft zu erklären sein.[2]

Das erscheint mir nachgerade als eine Umkehrung der tatsächlichen Verhältnisse. Gruppenakzeptanz wird es wohl kaum geben ohne die unabhängigen Einzelurteile der Gruppenmitglieder. Somit wäre zunächst zu fragen, wie überhaupt ein einzelner Prüfer dazu kommt, einen Beweis (oder einen Teil davon) als schlüssig zu akzeptieren. Mathematikern darf unterstellt werden, dass sie Schlüssigkeit bescheinigen, wenn sie in der Vorlage die dafür erforderlichen *sachlichen* Merkmale erkannt haben. Ergeben sich abweichende Befunde in der Gruppe, so wird – der Soziologie sei's gesagt – nicht abgestimmt, sondern abgeglichen, d. h. man verständigt sich (wiederum auf sachlich-logischer Grundlage) über die noch monierten Punkte. Das alles geht der Akzeptanz durch die Gemeinschaft *bedingend voraus* und kann daher schwerlich von ihr konstituiert worden sein.

Zu den eben ins Feld geführten „sachlichen" Gründen schließlich noch ein Wort. – Eine physikalische Hypothese etwa muss sich *im Experiment bewähren*, denn die Objekte der materiellen Erscheinungswelt, auf die sie sich bezieht, sind opak und zeigen ein sich potentiell veränderndes Eigenverhalten, das an keinerlei Beschreibungssyntax gebunden ist. Anders die ‚Gegenstände' der Mathematik. Der alte Streit, ob sie als eigenständige Gedankendinge existieren, ist ganz unerheblich. Es lässt sich über ihre Eigenschaften auch dann reden, auch wenn man nicht in einem realistischen Sinn an ihr Dasein in einem platonischen Ideenhimmel glaubt (was umgekehrt aber auch nicht schadet). Ermöglicht wird das durch die strikte Kopplung dieser Rede an ein Ensemble syntaktischer Regeln und Vereinbarungen (im Kern eben das, was die axiomatische Methode seit jeher leistet). Die Redebestandteile – Terme, Formeln, Beweise – sind rekursiv aufgebaut, ihre Zergliederung führt also auf Untereinheiten. Diese sind (bei Beweisen) im äußersten Fall die Anwendung einer Regel, meist aber größere Sinnabschnitte, die kraft Erfahrung im Regelgebrauch bzw. im betreffenden Spezialgebiet intuitiv nachvollziehbar sind.

Auf diese letzte Prüfebene spielt Ludwig Wittgenstein in seinen *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* mit der Frage an, worin es sich denn äußere, „daß der Beweis mich *zwingt*". Seine Antwort in Nr. 34:

> Doch darin, daß ich so und so darauf vorgehe, daß ich mich weigere, einen anderen Weg zu gehen. Als letztes Argument gegen Einen, der so nicht gehen wollte, würde ich nur noch sagen: » Ja siehst du denn nicht . . . ! «– und das ist doch kein *Argument*.

Beim letzten Tüpfelchen in der Frage der Gewissheit stehen wir also wieder da, wo einst Descartes zufrieden war, eine Sache „klar und deutlich" erfasst zu haben. Kann man mehr erwarten?

Anmerkungen

1. Fairerweise sei angemerkt, dass Lakatos seinen „Renaissance"-Artikel auf dem Londoner Colloquium in the Philosophy of Science (1965) zwar angekündigt, dann aber zurückgehalten hat. Er wurde postum veröffentlicht in *Brit. J. Phil. Sci.* 27 (1976). – Für nähere Einzelheiten der Diskussion zu „heuristischen Falsifikatoren" vgl. A. Schreiber: *Begriffsbestimmungen. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung*, Berlin 2011.
2. Bei David Hersh klingt das eher apodiktisch (vgl. Proving is Convincing and Explaining, *Educ. Stud. Math.* 24 (1993)), während Bettina Heintz in ihrer Monografie *Die Innenwelt der Mathematik* (Wien; New York 2000) zunächst noch offen lässt, wie weit man hier mit der Suche „nach sozialen Faktoren" kommt. Allerdings bleibt leider auch offen, wie in einer „konstruktivistischen Wissenschaftssoziologie" denn erst einmal die Geltung von Aussagen zustande kommen soll, die ihrerseits die Geltung mathematischer Sätze zum Gegenstand haben.

Prof. Dr. Alfred Schreiber, Friedrich-Hegel-Straße 8,
01187 Dresden. info@alfred-schreiber.de