Wie man Hasen fängt

Alfred Schreiber

Approach your problem from the right end and begin with the answers. Then one day, perhaps you will find the final question.

Robert van Gulik
The Chinese Maze Murders

Mathematikern wird gerne unterstellt, sie verwischten die Spuren zu den Ergebnissen ihrer Forschung. Das mag sein, schon aus Gründen der Darstellungsökonomie. Selten verlaufen diese Wege ja geradlinig. In *The Art of Thought* (1926) identifizierte Graham Wallas sogar eine Phase unbewusster schöpferischer Arbeit, die er Inkubation nannte. Nach dem Zeugnis derer, die sie an sich beobachten, folgt sie typischerweise längerem, hartnäckigem und vergeblichem Bemühen um die Lösung eines Problems. Inkubation setzt also ein gewisses Maß an (ausgehaltener) Frustration voraus. Hier liegen Last und Lust der Mathematik, liegt auch das innere Risiko des Forscherberufs.

Wie schafft es der Mathematiker, den Mut nicht zu verlieren, wenn das bebrütete Problem sich allen Lösungsversuchen widersetzt? Manchmal schafft er es freilich nicht. Der einzigartige Paul Erdős empfahl, an DAS BUCH zu glauben: ein von Gott verwahrtes transfinites Kompendium aller mathematischen Theoreme samt ihrer vollkommenen Beweise.[1] Ist Gott einem nicht ans Ziel gelangenden Grübler wohlgesonnen, gewährt er ihm einen kurzen Blick in DAS BUCH. Damit endet die Inkubation: kraft Eingebung einer guten Idee, Erleuchtung durch einen Gedankenblitz! Handwerkliches Können und Fleiß sollten nun genügen, den Rest der Arbeit – das ist vor allem die beweistechnische Sicherung der Lösung – im Tageslicht bewussten Denkens zu erledigen.

Dieses Bild schöpferischer Arbeit scheint vornehmlich auf ingeniöse Geister zugeschnitten. Jacques Hadamard hat das in einer berühmt gewordenen Studie[2] bekräftigt, gestützt auf die Selbstauskünfte möglichst erstrangiger Forscher (u. a. Henri Poincaré). Doch wie steht es um gewöhnliche Sterbliche, jene Normalmenschen, die Schopenhauer einst so freundlich als „Fabrikware der Natur“ bezeichnet hat? Auch ihnen kann geholfen werden: durch Georg Pólyas Kompendium der Heuristik, das in insgesamt vier Bänden vorliegt (*Vom Lösen mathematischer Aufgaben I, II* sowie *Mathematik und plausibles Schließen I,II*). Darin werden u. a. „Mittel und Methoden des Aufgabenlösens“ entwickelt, heuristische Verfahren, die der praktischen Arbeit abgeschaut sind. Statt Rezepte zu liefern, sollen sie dem Denken *Bewegungsspielräume* eröffnen. In diesen ‚darf‘ man „Herumprobieren“, mittels „Wunschdenken“ vom Ergebnis her auch einmal rückwärts arbeiten oder die Elemente einer Problemsituation variieren (um an Spezialfällen und Grenzlagen Weiterführendes zu entdecken, z. B. Symmetrien). Der Einzelne kann daraus großen Nutzen ziehen, wenn er sich aktiv für Mathematik interessiert und an Beispielen lernen möchte, wie man eigene Lösungswege findet oder die Lösungswege anderer (mit ihren manchmal unmotiviert scheinenden Kunstgriffen) nachvollzieht.

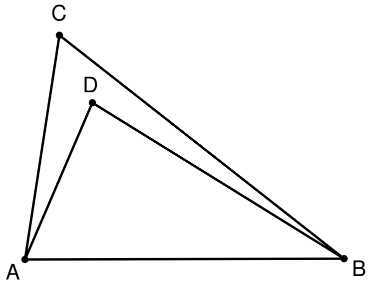
Seinen persönlichen Weg zur Heuristik hat Pólya nicht verschleiert. Alles begann nämlich mit einem peinlich empfundenen Misserfolgserlebnis in seiner Studentenzeit:

> Ich mußte einem Jungen, den ich auf eine Prüfung vorbereitete, eine elementare stereometrische Aufgabe erklären, aber ich verlor den Faden und blieb stecken. Ich hätte mich ohrfeigen können, daß ich bei einer so einfachen Aufgabe versagt hatte, und setzte mich den nächsten Abend hin und arbeitete die Lösung gründlich durch, damit ich sie nie wieder vergessen würde. Bei dem Versuch, mir die natürliche Entwicklung der Lösung und die Verkettung der wesentlichen in sie eingehenden Ideen intuitiv zu vergegenwärtigen, gelangte ich schließlich zu einer geometrischen Darstellung des sich beim Aufgabenlösen abspielenden Prozesses. Das war meine erste Entdeckung in der Heuristik und der Beginn meines lebenslänglichen Interesses für diesen Gegenstand. (*Vom Lösen mathematischer Aufgaben, II*, Basel und Stuttgart 1967, S. 15)

An eine „Moderne Heuristik“[3] haben sich Michalewicz und Fogel herangewagt. Sie kritisieren die verbreitete Gepflogenheit, Aufgaben im Kontext gerade derjenigen Methoden zu präsentieren, die zu ihrer Lösung gebraucht werden. Solches Einüben kann zweckmäßig sein, vergleichbar vielleicht Stützrädern am Fahrrad. Nimmt man diese aber weg, so wird sich realistischerweise das *Problem* (und nicht die Methode) als Ausgangspunkt aufdrängen. Es kann dann passieren, dass ‘einfache’ Aufgaben auf einmal schwierig erscheinen, weil ihnen der methodische Kontext fehlt.

Ein Beispiel dafür ist die Behauptung, dass für irgendeinen Punkt D im Innern eines beliebigen Dreiecks ABC die Ungleichung $AD + DB < AC + CB$ gilt. – Michalewicz und Fogel: „This problem is *so* easy, it seems that there is nothing to prove.“ Bei einem Aufgabenlöser, der nicht so fest im Sattel sitzt, könnte eine solche Voreinstufung die Wahrscheinlichkeit einer mentalen Verkrampfung zusätzlich erhöhen. In der Tat berichten die Autoren, weniger als 5 Prozent ihrer Probanden (Studierende aller Semester, Professoren für Mathematik, Informatik und Ingenieurwissenschaften) hätten die Aufgabe innerhalb einer Stunde gelöst; viele brauchten mehrere Stunden, manche schafften es gar nicht.

MDMV 19 / 2011 | 92–93



Die Figur „sieht so leer aus", konstatierte Pólya einmal bei einer anderen, ähnlich leichten Geometrieaufgabe (*Vom Lösen mathematischer Aufgaben, I*, S. 28). „Ohne Zweifel werden wir in der gewünschten Konstruktion mehr Linien brauchen ...". Und geradezu wörtlich passt auf unsere Dreiecksaufgabe auch die kurz darauf folgende Feststellung: „Zufall oder Eingebung mag uns veranlassen, eine Gerade in die Figur einzuführen ...". Aber welche? Es geht also nicht ohne *Deus ex machina*: eine kleine Inkubation und eine zumindest mäßige Erleuchtung.

Fügt man, wie hier, der Problemsituation weitere Elemente (z. B. eine Hilfslinie) hinzu, so verändert man in gewissem Sinn ihre Struktur. Die Gestaltpsychologie will ganz allgemein Umstrukturierungen am Werke sehen, wenn die Arbeit an einem Problem ihre entscheidende Phase durchläuft. Ein beliebtes Paradebeispiel ist die Additionsaufgabe $1 + 2 + \ldots + 100$, die der siebenjährige Gauß in der umgeformten Gestalt $(1+100)+(2+99)+\ldots$ gelöst haben soll. Eine geeignete Umstrukturierung *ist* zumeist, wie hier, bereits die Lösung. Daher mutet eine Empfehlung,[4] man möge die Aufgabe umstrukturieren, ein wenig tautologisch an. Sie erinnert mich an einen Bauernscherz, der vor Zeiten am Niederrhein zu hören war. Kinder wurden gefragt, wie sich wohl ein Hase am leichtesten fangen ließe. Natürlich kamen sie nicht darauf und waren nicht wenig erstaunt, als ihnen versichert wurde, man brauche ihm nur Salz auf den Schwanz zu streuen.

Dazu bot sich mir vor Jahren eine Gelegenheit, als ich in dem Büchlein Bartholomé/Rung/Kern: *Zahlentheorie für Einsteiger* (1995) folgende reizvolle Aufgabe fand (hier verallgemeinert formuliert): Man beweise, dass eine $(n+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ stets zwei Zahlen enthält, von denen eine die andere teilt. (Wer diese Aufgabe nicht kennt, sollte sie lösen, bevor er oder sie hier weiterliest!)

Zur Einstimmung heißt es am angegebenen Ort: „Die folgende Aufgabe ist nicht mehr schwer, wenn man eine Idee hat!" – Wie wahr! Und um es mit Pólya zu sagen: „... man braucht Glück, um auf eine gute Idee zu kommen – gute Ideen sind selten.". An jenem sonnigen Urlaubsnachmittag hatte ich jedenfalls *diese* eine gute Idee nicht. Aus dem Versuch, die kleine Aufgabe 'auf die Schnelle' zu erledigen, wurde nichts. Am Abend hatte ich zu meiner Schande nur wenig mehr als die Beobachtung, dass die Komplementärteiler Potenzen von 2 sein mussten. Erst am nächsten Morgen wusste ich damit etwas halbwegs Vernünftiges anzufangen, das am Ende wie eine Lösung[5] aussah.

Monate später stieß ich zufällig auf Lösungen dieser Aufgabe in diversen Trainingsbüchern zum „Problem-Solving", stets unter der Rubrik 'Schubfach-Prinzip' (z. B. bei Larson, der wiederum den Putnam-Wettbewerb 1958 als Quelle angibt). Aber eigentlich war es immer nur diese *eine* Lösung: Man dividiere die geraden Zahlen der Teilmenge durch die jeweils größtmögliche Zweierpotenz. So ergeben sich $n + 1$ ungerade Zahlen, die sämtlich in der n-elementigen Menge $\{1, \ldots, 2n - 1\}$ liegen. Daher sind zwei von ihnen gleich, und diese gehören zu zwei Zahlen der ursprünglichen Teilmenge, die sich um einen ganzzahligen Faktor (eine Zweierpotenz) unterscheiden.

Eine unüberbietbar knappe, eine elegante, eine schöne Musterlösung! Kein Wunder, dass sie sich im BUCH[6] findet. Einmal bekannt, bleibt sie haften und lässt einen nicht mehr so leicht auf andere Ideen kommen. Das tröstet mich ein wenig über meinen gewundenen Gedankengang von damals hinweg. Immerhin kostete er mich einen Tropfen Schweiß – und damit auch ein Körnchen Salz.

Anmerkungen

1. Unter dem Titel *Das BUCH der Beweise*, 4. Auflage, Berlin/Heidelberg 2010, haben Martin Aigner und Günter M. Ziegler schon einmal eine endliche Untermenge davon veröffentlicht.
2. J. Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press, 1945. Eine Neuausgabe als Paperback erschien 1996 unter dem Titel *The Mathematician's Mind*.
3. Z. Michalewicz; David B. Fogel, *How to Solve It: Modern Heuristics*, Berlin/Heidelberg 2000. Der Titel erinnert an Pólyas früheste Buchpublikation zur Heuristik (*How to Solve It*, dt. *Schule des Denkens*, 1949).
4. „Modify the Problem" ermuntert uns L. C. Larson in *Problem-Solving Through Problems* (New York, 1983).
5. Sie trägt noch Spuren eines indirekten Ansatzes. Für diesen hatte ich mir eine Abbildung f zurechtgelegt von $\{1, \ldots, 2n\}$ auf $\{n + 1, \ldots, 2n\}$ vermöge $f(k) = k$ für $k \geq n + 1$ und $f(k) = 2^m k$ für $k \leq n$ (wo m das kleinste r mit $2^r k \geq n + 1$). Ist dann X irgendeine Teilmenge von $\{1, \ldots, 2n\}$, so ist die Einschränkung von f auf X gerade dann injektiv, wenn X keine zwei Zahlen k und $2^r k$ ($r \geq 1$) enthält. In diesem Fall ist die Anzahl von X dieselbe wie die von $f[X]$ und somit $\leq n$. – In allen Details ausgeführt braucht diese Überlegung eine A4-Seite.
6. Aigner/Ziegler (a. a. O., S. 186) berichten, Erdős habe diese Aufgabe gern genutzt, um mathematisches Verständnis zu testen. So beim zwölfjährigen Lajos (Louis) Pósa während des Abendessens. Der hochbegabte Junge soll gleichzeitig mit seiner Suppe auch mit der Lösung fertig geworden sein. Ross Honsberger (*Mathematical Gems*, MAA 1973) verlegt die Szene auf den Mittag und gibt Pósas Bedenkzeit mit einer halben Minute an (was mit einem kleinen Rest Suppe sicher verträglich ist). Erdős sei tief beeindruckt gewesen; er selbst habe für den Beweis ungefähr zehn Minuten gebraucht. Allerdings ist dabei von einer *anderen* (deutlich einfacheren) Beweisaufgabe die Rede: Eine $(n+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ enthält stets zwei teilerfremde Zahlen (vgl. Aigner/Ziegler S. 185). – Merkwürdig, dass ein Mann wie Erdős darüber zehn Minuten nachdenken musste. Gab es vielleicht am Mittag die eine, am Abend die andere Aufgabe? Oder ranken sich hier womöglich schon Legenden?

Prof. Dr. Alfred Schreiber, Friedrich-Hegel-Straße 8,
01187 Dresden. info@alfred-schreiber.de