Heinz Gumin Preis für Gerd Faltings

Michael Rapoport

Gerd Faltings
(Foto: Gert-Martin Greuel, MFO)

Sehr geehrter Herr Neupert, lieber Herr Meyer, liebe Familie Gumin, lieber Gerd, mit Angelika, Christina und Ulrike, sehr verehrte Damen und Herren,

Ich habe die Aufgabe übernommen, die Laudatio auf den Träger des ersten Heinz Gumin Preises der Carl Friedrich von Siemens Stiftung, Herrn Professor Dr. Gerd Faltings vom Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn, zu halten. Das ist ganz sicher eine ehrenvolle Aufgabe. Gleichzeitig halte ich dies für eine schwierige Aufgabe, da sich hier ein sehr gemischtes Publikum versammelt hat, das von engeren Fachkollegen über professionelle Mathematiker bis hin zu Laien reicht, deren letzter Kontakt mit der Mathematik in ihrer Schulzeit stattgefunden hat (und an den sie sich vielleicht nur mit Grausen zurückerinnern). Ich sehe mein Ziel darin,

1. zu begründen, warum mit Faltings eine gute Wahl des ersten Heinz Gumin Preisträgers getroffen wurde,
2. die Person Faltings ein wenig vorzustellen,
3. zu versuchen, etwas von der Faszination von Faltings' wissenschaftlichem Arbeitsgebiet zu vermitteln.

Dass ich besonders das dritte Ziel nicht wirklich erreichen kann, ist klar; aber wenn ich es schaffen könnte, Ihnen den Satz zu entlocken (der ein Ausspruch meiner 98-jährigen Mutter ist), dass „ich es ja nicht verstehe, aber doch brennend interessant finde", so wäre ich zufrieden. Daher habe ich es auch entgegen dem allgemeinen Rat von Kollegen gewagt, Folien [im nachfolgenden als Kästen wiedergegeben] mit mathematischen Formeln an die Wand zu werfen: ich wollte versuchen, Sie wirklich in die Sachen, die in Faltings' Mathematik verhandelt werden, einzubeziehen.

Gerd Faltings ist Jahrgang 1954. Bereits als Schüler fiel sein mathematisches Talent auf, das er als zweifacher Bundessieger im Bundeswettbewerb Mathematik unter Beweis stellte. Faltings studierte 1972–78 Mathematik und Physik in Münster. Er schloss sein Studium mit dem Diplom ab und wurde noch im selben Jahr promoviert (beides bei J. Nastold). Anschließend verbrachte er ein Auslandsjahr an der Harvard Universität und schloss eine Assistentenzeit 1979–82 in Münster an, wo er sich 1981 habilitierte. In dieser Zeit veröffentlichte Faltings 13 Arbeiten über Kommutative Algebra, insbesondere zu Endlichkeitsaussagen über lokale Kohomologiegruppen. 1982 wurde Faltings im Alter von 27 Jahren an die Universität Wuppertal berufen. Im selben Jahr kam der große Durchbruch. Erstens lieferte er fundamentale Beiträge zur Arakelovgeometrie, insbesondere den Faltings'schen Indexsatz und den Faltings-Riemann-Roch'schen Satz. Und zweitens bewies er die drei großen Endlichkeitssätze der Arithmetischen Algebraischen Geometrie, nämlich die Mordell-Vermutung (Endlichkeit der Menge der rationalen Punkte auf einer glatten projektiven Kurve von Geschlecht ≥ 2 über einem Zahlkörper), die Shafarevich-Vermutung (Endlichkeit der Menge der glatten projektiven Kurven von gegebenem Geschlecht über einem Zahlkörper mit vorgegebener Menge von schlechten Reduktionsstellen) und die Tate-Vermutung (über Homomorphismen von abelschen Varietäten). Genauer beweist Faltings, zum Teil einem Programm von L. Szpiro folgend, die Shafarevich-Vermutung in verschärfter Form, aus der (nach A. Parshin) die Mordell-Vermutung und (nach J. Tate) die Tate-Vermutung folgen. Die Arbeit von Faltings ist nur 17 Seiten lang; allerdings ist diese Kürze auch ein Resultat des in der Folge so berüchtigten Telegrammstils der Faltings'schen Arbeiten, der diese so schwierig für den Leser macht. Das erste Schaubild erläutert „den Mordell".

Wie Sie sehen, geht es um Lösungen von Polynomgleichungen, genauer um die Untersuchung der geometrischen Struktur ihrer Lösungsmenge. Dies ist das Thema der Algebraischen Geometrie. In der Arithmetischen Algebraischen Geometrie interessiert man sich speziell für Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten und deren ganzzahlige Lösungen. In den vergangenen Jahrzehnten wurden für diese Untersuchungen Methoden der Topologie, besonders kohomologische Methoden, nutzbar gemacht. Faltings' ganzes Werk nach seinen Anfängen in der Kommutativen Algebra ist diesem Problemkreis gewidmet, allerdings in einer mathematischen und methodischen Breite, die ihresgleichen sucht. Der „Mordell" ist hierbei der spektakuläre Beginn, aber keineswegs der Abschluss. Die Tatsache, dass seine späteren Resultate dem „Mann auf der Straße" schwieriger zu erklären sind, heißt nicht, dass sie niedriger einzustufen sind.

Den Sprung aus der doch relativ engen Welt der Kommutativen Algebra in die Arithmetische Algebraische Geometrie bewältigte Faltings mit Hilfe seiner Teilnahme

Theorem 1. *(Satz von Faltings (1983) = Ex-Vermutung von Mordell (1922))*
Sei K ein Zahlkörper. Sei X eine glatte projektive Kurve über K, vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann ist $X(K)$ eine endliche Menge.

Beispiel 2. Falls eine solche Kurve X im $\mathbb{P}^2_K$ eingebettet ist, so ist sie in projektiven Koordinaten beschrieben als

$$X = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2_K \mid f(x_0 : x_1 : x_2) = 0\},$$

wobei f ein homogenes Polynom ist vom Grad ≥ 4.
Zum Beispiel sei $f = X_0^n + X_1^n + X_2^n$, wobei $n \geq 5$ ungerade sei. Falls $K = \mathbb{Q}$, so ist $X(\mathbb{Q})$ eine Menge mit drei Elementen (Satz von Wiles=Ex-Fermat'sche Vermutung). Das Resultat von Faltings ist weniger genau in diesem speziellen Fall, weil es nur die Endlichkeit von $X(\mathbb{Q})$ behauptet. Aber es ist in anderer Hinsicht viel stärker. Beispielsweise hat $X(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{-2}))$ mehr als drei, aber nach Faltings immer noch nur endlich viele Elemente. Und es ist anwendbar auf beliebige homogene Gleichungen (vom Grad ≥ 4) über beliebigen Zahlkörpern.

an diversen Weiterbildungsveranstaltungen am Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach. In Oberwolfach hat er auch seinen ganz frischen Beweis der Tate-Vermutung auf einer Tagung über Kommutative Algebra vorgetragen (wobei von den 30 Teilnehmern der Tagung nur 5 zu seinem Vortrag kamen, der in der Tat kein Thema der Kommutativen Algebra behandelte).

Hier möchte ich eine Bemerkung an die Laien unter Ihnen einschieben. Sie haben vielleicht den Film „Good Will Hunting" gesehen, in dem ein hochbegabter Junge, der es wegen psychischer Probleme nur zur Reinigungskraft (aber immerhin am MIT) gebracht hat, ohne jede fachliche Vorbildung ein großes Problem der Mathematik löst. Ein ähnliches Motiv taucht auch in anderen Hollywoodfilmen auf. Aber glauben Sie mir: Obgleich Faltings zu der Zeit, als er diesen Satz bewies, sehr jung war, war er bereits damals ein hochgebildeter und grundsolider Mathematiker und ein brillianter Techniker. In der Tat halte ich es für unmöglich, dass jemand ohne gründliche Fachausbildung einen bedeutenden Satz beweisen kann.

1984 erfolgte die Heirat mit Angelika Faltings, geb. Tschimmel, und aus dieser Ehe gingen die Töchter Christina (geb. 1985) und Ulrike (geb. 1988) hervor. 1985 folgte Faltings einem Ruf an die Princeton University, wo er bis 1994 blieb. In dieser Zeit beschäftigte sich Faltings zunächst mit zwei Problemkreisen. Angeregt durch seinen Beweis der Tate-Vermutung gab er eine Konstruktion von arithmetischen Kompaktifizierungen des Siegelschen Modulraums von abelschen Varietäten. Dabei baute er frühere Arbeiten zu der entsprechenden Konstruktion über $\mathbb{C}$ von D. Mumford (mit A. Ash, M. Rapoport und Y. Tai) und zu der arithmetischen Kompaktifizierung des Hilbertschen Modulraums von abelschen Varietäten, die ich in meiner Thèse ausgeführt hatte, wesentlich aus. Der andere Problemkreis, der Faltings bis heute beschäftigt, ist die p-adische Hodgetheorie, d.h. der Zusammenhang zwischen p-adischer Etalkohomologie und kristalliner Kohomologie. Dieser Zusammenhang – von A. Grothendieck „mysteriöser Funktor" genannt – wurde von J.-M. Fontaine vorausgesagt, und Fontaine und W. Messing hatten einen Zugang zu diesem Problem gefunden, der in der Folge mit Arbeiten von K. Kato und T. Tsuji zum Erfolg führte. Faltings entwickelte eine hochoriginelle, völlig verschiedene Methode, die ein auch heute nicht voll ausgeschöpftes großes Potenzial besitzt.

1986 erhielt Faltings die Fields-Medaille auf dem International Congress of Mathematicians in Berkeley. Mit seinem damaligen Alter von 32 Jahren blieb er weit unter der Altersgrenze von 40 Jahren für Fields-Medailisten.

Ein weiteres Interessengebiet von Faltings wurde in der Folge die Diophantische Approximation. Angeregt durch Arbeiten von P. Vojta bewies Faltings die Lang-Vermutung über abelsche Varietäten über Zahlkörpern (Endlichkeit der Menge der rationalen Punkte einer Untervarietät einer abelschen Varietät, die kein Translat einer Untergruppe positiver Dimension enthält); dieser Satz gibt auch einen neuen Beweis der Mordell-Vermutung. Hauptwerkzeug des Beweises ist der Faltings'sche Produktsatz, der das Roth'sche Lemma aus der klassischen Diophantischen Approximation in der Arithmetischen Algebraischen Geometrie ersetzt. Dieses Werkzeug haben Faltings und G. Wüstholz in der Folge verwendet, um einen neuen Beweis des Schmidt'schen Unterraumsatzes zu geben. Das folgende Schaubild verdeutlicht die Eleganz und Schlagkraft einer Begriffsbildung von Faltings in diesen Arbeiten. Die Definition klingt banal und für ihr Verständnis benötigt man nur Kenntnisse aus der Linearen Algebra. Obwohl es das Analogon hierzu schon länger in der Theorie der Vektorbündel gab, ist es Faltings gewesen, der die ganze Tragweite dieser Begriffsbildung auch in anderen Theorien erkannt hat.

1994 kehrte Faltings nach Deutschland zurück und wurde Direktor am MPI in Bonn. Er beteiligt sich am mathematischen Leben in Bonn, kommt zum wöchentlichen Kolloquium und hält regelmäßig jedes Semester eine Vorlesung über Arithmetische Algebraische Geometrie an der Bonner Universität. 1986 erhielt Faltings den Leibnizpreis, und 2008 den von-Staudt-Preis. Bis in die Gegenwart hinein leistet Faltings wichtige Beiträge zur Algebraischen Geometrie. Eine etwas summarische Aufzählung könnte folgendermaßen aussehen:

1. Seine Beiträge zur Theorie von Vektorbündeln auf algebraischen Kurven, die auch Ideen von mathematischen Physikern, vor allem von E. Witten, aufgreifen. Insbesondere zu erwähnen wären seine allgemeine Konstruktion der Hitchinfaserung (die in B. C. Ngôs Beweis der Matching-Vermutung von R. P. Langlands und D. Shelstad benutzt wird (Fields-Medaille 2010)); sein Beweis

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Eine *$\mathbb{Z}$-Filtration* auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathbb{Z} &\longrightarrow \{\text{ Teilräume von } V\},\\ x &\longmapsto \mathcal{F}^x\end{aligned}$$

die monoton fallend ist mit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^x &= V \text{ für } x \ll 0\\ \mathcal{F}^x &= (0) \text{ für } x \gg 0 .\end{aligned}$$

Die Sprünge einer $\mathbb{Z}$-Filtration (das sind die Zahlen x mit $gr^x_{\mathcal{F}}(V) := V^x/V^{x+1} \neq (0)$) sind ganze Zahlen. Entsprechend definiert man $\mathbb{Q}$-Filtrationen und $\mathbb{R}$-Filtrationen. Hier sind die Sprungstellen der Filtration durch Zahlen aus $\mathbb{Q}$ oder aus $\mathbb{R}$ parametrisiert.

Beispiel 3. Sei $l_1, \dots, l_n$ eine Basis von V. Sei $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$ eine fallende Folge von reellen Zahlen. Dann erhalten wir eine $\mathbb{R}$-Filtration mit Sprungstellen $c_1, c_2, \dots, c_n$, indem wir setzen $\mathcal{F}^{c_1} = \langle l_1 \rangle$, $\mathcal{F}^{c_2} = \langle l_1, l_2 \rangle, \dots, \mathcal{F}^{c_{n-1}} = \langle l_1, l_2, \dots, l_{n-1} \rangle$, $\mathcal{F}^{c_n} = V$.

Zu $(V, \mathcal{F})$ assoziieren wir folgende numerische Invarianten:

$$\begin{aligned}\deg(V,\mathcal{F}) &= \sum\nolimits_x x \dim gr^x_{\mathcal{F}}(V) && \textit{Grad}\\ \mathrm{rk}(V,\mathcal{F}) &= \dim V && \textit{Rang}\\ \mu(V,\mathcal{F}) &= \deg(V,\mathcal{F})/\mathrm{rk}(V,\mathcal{F}) && \textit{Anstieg}\end{aligned}$$

Im vorigen Beispiel ist

$$\mu(V,\mathcal{F}) = \frac{1}{n}(c_1 + \dots + c_n) .$$

Sei jetzt V ein K-Vektorraum, und sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Betrachten wir Paare $(V, \mathcal{F})$, wobei $\mathcal{F}$ eine $\mathbb{R}$-Filtration von $V \otimes_K L$ ist.

Definition 4. Das Paar $(V, \mathcal{F})$ heißt *semi-stabil*, falls

$$\mu(W, \mathcal{F}_{|W}) \leq \mu(V, \mathcal{F}) , \ \forall W \subset V .$$

Hierbei durchläuft W alle K-Teilräume von V.

Diese Begriffe sind Analoga entsprechender Begriffe aus der Theorie der Vektorbündel auf algebraischen Kurven, die auf Mumford zurückgehen. Faltings erkennt ihre Ubiquität. Hier sind drei Manifestationen.

1. Sei $K = \mathbb{R}$ und $L = \mathbb{C}$. Sei $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist $(V, \mathcal{F})$ (wobei $\mathcal{F}$ eine $\mathbb{Z}$-Filtration ist) semi-stabil vom Anstieg $i/2$ genau dann, wenn $(V, \mathcal{F})$ eine Hodgestruktur vom Gewicht i ist (R. Pink).
2. Sei $K = \mathbb{Q}_p$ und L beliebig voll verzweigt. Genau dann ist ein *$\mathbb{Z}$-filtrierter Isokristall* semi-stabil vom Anstieg 0, wenn er das Bild einer kristallinen Galoisdarstellung von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ unter Fontaines Funktor ist (P. Colmez, Fontaine).
3. Sei $K = \mathbb{Q}$ und L beliebig. Sei V der Dualraum zu $\mathbb{Q}^n$. Sei $\mathcal{F}$ wie im ersten Beispiel definiert durch die Basis $l_1, \dots, l_n$ von $V \otimes_{\mathbb{Q}} L$, und durch das Tupel von reellen Zahlen $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$.

Theorem 5. *(Faltings, Wüstholz)*
Sei $(V, \mathcal{F})$ wie oben, und semi-stabil vom Anstieg > 0. Dann ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{Z}^n \mid |l_i(x)| < \|x\|^{-c_i}, i = 1, \dots, n\}$$

endlich.

Dieser Satz impliziert sofort das folgende Korollar.

Korollar 6. *(Roth (= Fields-Medaille 1958))*
Sei $\kappa > 2$. Sei $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$. Dann existieren nur endlich viele p/q mit

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{\kappa}} .$$

der Verlindeformel über die Dimension des Raums der globalen Schnitte des Geradenbündels mit Ladung 1 auf dem Raum der G-Bündel für klassische Gruppen G; seine Konstruktion von projektiven Zusammenhängen auf dem Raum der globalen Schnitte von Thetadivisoren im Raum der Higgsbündel; und die Uniformisierung von Vektorbündeln durch Schleifengruppen. Das folgende Schaubild, eine schlagend einfache kohomologische Charakterisierung von semi-stabilen Vektorbündeln, ist ein Nebenprodukt dieser Untersuchungen.

Theorem 7. *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorbündel auf der glatten projektiven Kurve X. Dann ist $\mathcal{V}$ semi-stabil genau dann, wenn es ein Vektorbündel $\mathcal{W}$ auf X gibt mit*

$$H^i(X, \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) = (0), \forall i \geq 0 .$$

2. Seine Arbeiten zu lokalen Modellen von Shimuravarietäten und sein Beweis der Normalität von Schubertvarietäten in Flaggenvarietäten zu Schleifengruppen, der die Grundlage wichtiger weiterer Ergebnisse in dieser Theorie ist.

3. Die geometrische Konstruktion von Langlandskorrespondenzen (*nichtabelsche Lubin-Tate-Theorie*), insbesondere der Beweis der Vermutung von B. Gross und M. Hopkins, der die p-adischen Türme von V. Drinfeld und von J. Lubin/Tate in Beziehung setzt.

4. Die Bestimmung des Bildes der nicht-archimedischen Periodenabbildung im minusculen Fall, die eine Vermutung von U. Hartl bestätigt und eine Vermutung von Th. Zink und mir über die Existenz einer universellen kristallinen Galoisdarstellung auf dem zulässigen Ort beweist.

Dabei habe ich aus Zeitmangel so einiges weggelassen. Zum Beispiel hat sich Faltings in letzter Zeit mit den Ideen von M. Kim zur Diophantischen Geometrie beschäftigt.

Ein Bericht über Faltings wäre unvollständig, wenn ich nicht sein ausgeprägtes Pflichtbewusstsein erwähnte: Beispielsweise war er 12 Jahre lang Hauptherausgeber der *Inventiones*, eine Aufgabe, die er sehr ernst nahm und bei der er so manches Mal den referee's report selbst geschrieben hat. Aber Faltings hat auch Interessen außerhalb seines Berufes: Er ist begeisterter Gärtner, sein Haus wurde für einen Architekturpreis vorgeschlagen, und sein Weinkeller enthält manche gute Flasche. Was seinen Humor betrifft, so ist dieser mitunter ähnlich komplex wie seine wissenschaftlichen Arbeiten.

Bei einigen von Ihnen mag die Frage auftauchen, wie es sich für Faltings' Fachkollegen im engeren Sinne darstellen mag, einen solch hervorragenden Mathematiker auf ihrem Gebiet zu haben, und ob sie nicht dadurch eingeschüchtert oder gar frustriert sind. Aber Wissenschaft ist eine Gemeinschaftsunternehmung und hat nicht nur Sieger und Verlierer eines Wettbewerbs. Darüberhinaus überwiegt der Stolz, dass sich ein Faltings für unser Gebiet interessiert. Und schließlich hat Faltings unserem Gebiet immer wieder neue Impulse gegeben und aufgetretene Hindernisse beseitigt und damit dafür gesorgt, dass es auf unserem Gebiet weiter vorangeht. Und nichts ist in der Wissenschaft frustrierender als Stillstand.

Und deshalb möchte ich mit dem Ausruf schließen: Wir freuen uns, Gerd, dass Du unter uns bist – und herzlichen Glückwunsch zum heutigen Preis!

Prof. Dr. Michael Rapoport, Mathematisches Institut der Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn
rapoport@math.uni-bonn.de

Michael Rapoport, geboren am 2. 10. 1948, Mathematikstudium an der Humboldt Universität zu Berlin, der Université Paris-Sud, Princeton University und der Harvard University. Professuren in Heidelberg, Bonn, Wuppertal, Köln. Derzeit Professor für Arithmetische Algebraische Geometrie an der Universität Bonn. Leibnizpreis 1992, Prix Gay-Lussac/Humboldt 2000.